



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.



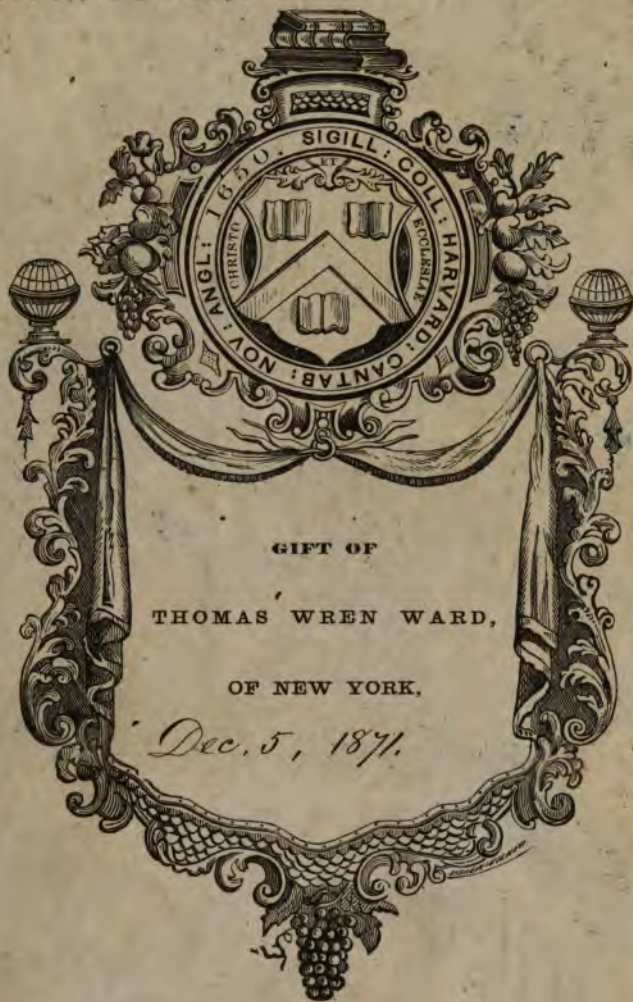


32  
2 7.5

SCIENCE CENTER LIBRARY

Math 8588.71

Oct. July. 1872.















*Durege, v.*

◉  
**DIE EBENEN  
CURVEN DRITTER ORDNUNG.**

**EINE ZUSAMMENSTELLUNG  
IHRER BEKANNTEN EIGENSCHAFTEN**

**BEARBEITET VON**

**DR. H. DURÈGE,**  
ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU PRAG.



**MIT 44 FIGUREN IN HOLZSCHNITT.**

**LEIPZIG,  
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.  
1871.**





DIE EBENEN  
CURVEN DRITTER ORDNUNG.

EINE ZUSAMMENSTELLUNG  
IHRER BEKANNTEN EIGENSCHAFTEN

BEARBEITET VON

DR. H. DURÉGE,  
ORD. PROFESSOR AN DER UNIVERSITÄT ZU PRAG.



*figurat*

MIT 44 FIGUREN IN HOLZSCHNITT.

LEIPZIG,  
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.  
1871.

Math 8588.71

1871, Dec. 5.

Gift of  
Thomas Wren Ward,  
of New York.

## VORREDE.

Die vorliegende Schrift entstand aus dem Wunsche, die Uebersicht über die grosse Zahl der bekannteren Eigenschaften der Curven dritter Ordnung möglichst zu erleichtern.

Dabei gab, abgesehen von anderen Schwierigkeiten, die Beantwortung der Frage, welche unter den zur Anwendung kommenden Sätzen aus der Geometrie der geraden Linie und der Kegelschnitte einer näheren Erörterung zu unterziehen, und welche als bekannt anzunehmen seien, zu mancherlei Zweifeln Anlass. Schliesslich schien es am angemessensten, so wenig wie möglich vorauszusetzen. Demgemäss ist fast nichts als bekannt angenommen worden, als die harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks und Vierseits; dagegen sind alle, oder doch fast alle Hülfsätze, welche bei den Curven dritter Ordnung zur Anwendung gelangen, in einer besonderen Abtheilung zusammengestellt. In den einzelnen Fällen, in denen die Erörterung eines Hülfsatzes unterlassen wurde, ist jedesmal auf solche Schriften verwiesen, von denen angenommen werden konnte, dass sie in Jedermanns Händen sind.

Die Figuren wurden zwar in einigen Fällen von vorher gezeichneten Curven abgenommen, meistens aber sind sie nur symbolisch dargestellt, theils wegen der leichteren Ausführbarkeit, theils aber, weil sie so zur Uebersicht geeigneter erschienen.

Unter den citirten Werken kommen die beiden folgenden: Salmon, A treatise on the higher plane curves. Dublin



1852, und Cremona, Introduzione ad una teoria geometrica delle curve piane. Bologna 1862 (auch in's Deutsche übertragen von Curtze: Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Curven. Greifswald 1865) bei weitem am häufigsten vor. Daher sind die Titel derselben öfters in abgekürzter Form „H. pl. Cvs“ und „Cve piane“ angeführt, oft auch ganz weggelassen worden. Ueberall da, wo hinter den Namen Salmon oder Cremona ein weiterer Zusatz sich nicht angegeben findet, sind demnach die angeführten Werke zu verstehen.

In den am Schlusse beigefügten Zusätzen sind einige Bemerkungen enthalten, deren Hinzufügung während des Druckes als wünschenswerth erschien.

Die speciellen Modificationen, welche die Eigenschaften der Curven dritter Ordnung durch das Auftreten eines Doppel- oder Rückkehrpunctes erleiden, wurden von der Behandlung vorläufig ausgeschlossen.

Prag, 5. Juli 1871.

**H. Durège.**

# Inhalt.

## Erste Abtheilung.

### Hilfssätze.

#### Erster Abschnitt.

##### Algebraische Hilfssätze.

	Seite
§. 1. Das Operationssymbol $\Delta$ , art. 1—6 . . . . .	3
§. 2. Resultat der Elimination einer Variablen aus zwei Gleichungen, art. 7. Bedingungen für die Existenz zweier gleicher Wurzeln einer Gleichung, art. 8 9. . . . .	6
§. 3. Zerlegung von $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ in lineare Factoren, art. 10 . . . . .	9

#### Zweiter Abschnitt.

##### Hilfssätze aus der Geometrie der geraden Linie.

§. 1. Homogene Punctcoordinaten, art. 11—19 . . . . .	10
§. 2. Doppelverhältnisse, art. 20—28 . . . . .	19
§. 3. Projectivische Punctreihen, art. 29—39 . . . . .	26
§. 4. Involution, art. 40—46 . . . . .	32
§. 5. Involutionen höherer Grade, art. 47—55 . . . . .	35
§. 6. Projectivische Strahlenbüschel, art. 56—64 . . . . .	40
§. 7. Projectivische Punctreihen und Strahlenbüschel in Verbindung. Strahleninvolutionen. Construction der Doppelstrahlen und Doppelpuncte, art. 65—76 . . . . .	46
§. 8. Vermischte Sätze, art. 77—83 . . . . .	52

#### Dritter Abschnitt.

##### Hilfssätze über Kegelschnitte.

§. 1. Bedingung, dass ein Kegelschnitt aus zwei Geraden besteht, art. 84 . . . . .	57
§. 2. Der Kegelschnitt als geometrischer Ort der Durchschnitte entsprechender Strahlen zweier projectivischer Strahlbüschel. Pascal's Theorem. Constructionen an einem durch fünf Puncte gegebenen Kegelschnitte, art. 85—93 . . . . .	58
§. 3. Conjugirte Pole in Beziehung auf einen Kegelschnitt. Pol und Polare, art. 94—101 . . . . .	63

	Seite
§. 4. Die Gleichungen von Kegelschnitten, welche dem Fundamentaldreieck ein- oder umgeschrieben sind, art. 102—104 . . .	65
§. 5. Kegelschnittbüschel. Das einem solchen conjugirte Dreieck. Die Form der Gleichung eines Kegelschnittes, wenn ein ihm conjugirtes Dreieck zum Fundamentaldreieck gewählt wird. Conjugirte Pole in Bezug auf einen Kegelschnittbüschel. Projectivische Strahlen- und Kegelschnittbüschel, art. 105—114.	67
§. 6. Die Involution, die auf einer Transversale durch einen Kegelschnittbüschel erzeugt wird, art. 115—121 . . . . .	71
§. 7. Schnitte eines Kegelschnittbüschels mit einem durch zwei Basispunkte desselben gehenden festen Kegelschnitte. Involution auf einem Kegelschnitte, art. 122—128 . . . . .	75
§. 8. Bestimmung des Mittelpunctes eines Strahlenbüschels, dessen Strahlen nach gegebenen Puncten gerichtet sind, und der einem gegebenen Strahlenbüschel projectivisch ist, art. 129. 130	83
§. 9. Kegelschnitte, welche zwei Tangenten und die Berührungsehne gemeinschaftlich haben, art. 131. 132 . . . . .	84

#### Vierter Abschnitt.

##### Hilfssätze über algebraische Curven.

§. 1. Anzahl der Durchschnitte zweier Curven. Anzahl der Puncte, die eine Curve $n$ . O. bestimmen. <i>Plücker's</i> Satz über die Durchschnitte zweier Curven gleicher Ordnung, von denen einige die Durchschnitte mit einer Curve niedrigerer Ordnung bilden, art. 133—148 . . . . .	86
§. 2. Die Tangente an einer Curve $n$ . O. Doppelpuncte, Rückkehrpuncte. Die <i>Hesse'sche</i> Curve, art. 149—154 . . . . .	93
§. 3. Wendepuncte, art. 155—158 . . . . .	98
§. 4. Mehrfache Puncte. Gleichungsform, wenn ein mehrfacher Punct in eine Ecke des Fundamentaldreieckes fällt, art. 159—163 . . . . .	100
§. 5. Eigenschaften der <i>Hesse'schen</i> Curve. Anzahl der Wendepuncte, art. 164—167 . . . . .	103
§. 6. Polaren. Die Classe einer Curve $n$ . O., art. 168—194 . . .	107
§. 7. Curvennetz, art. 195—199 . . . . .	118

#### Fünfter Abschnitt.

##### Hilfssätze über eine von *Steiner* aufgestellte Verwandtschaft.

§. 1. Erklärung und Eigenschaften derselben, art. 200—207 . .	121
§. 2. Anwendung auf die Bestimmung des vierten Basispunctes eines Kegelschnittbüschels, dessen Kegelschnitte durch gegebene Puncte gehen, und der einem gegebenen Strahlenbüschel projectivisch ist, art. 208. 209 . . . . .	127



**Zweite Abtheilung.***Curven dritter Ordnung.***Erster Abschnitt.**

## Einleitende Sätze.

Erklärungen. Erster, zweiter, etc. Tangentialpunct. Alle Curven 3. O., welche durch acht Punkte gehen, haben auch noch einen neunten Punct gemeinschaftlich. Folgerungen dieses Satzes, art. 210—235 . . . . . 133

**Zweiter Abschnitt.**

## Erzeugung der Curven dritter Ordnung.

- §. 1. Die Curve 3. O. als geometrischer Ort der Durchschnitte projectivisch entsprechender Strahlen und Kegelschnitte. Der vier Curvenpunkten gegenüberliegende Punct, art. 236—248. 138
- §. 2. Construction von Curven 3. O. aus verschiedenen Daten, art. 249—254 . . . . . 147
- §. 3. Constructionen bei einer durch neun Punkte gegebenen Curve 3. O., art. 255—259 . . . . . 154
- §. 4. Der Kegelschnitt durch fünf Durchschnittspuncte zweier Curven 3. O., Construction des neunten Durchschnittspunctes aller Curven 3. O., welche durch acht gegebene Punkte gehen, art. 260—266 . . . . . 158

**Dritter Abschnitt.**

## Die gerade und die conische Polare eines Punctes.

- §. 1. Allgemeines. Die gemischte gerade Polare zweier Puncte. Die harmonische Polare eines Wendepunctes, art. 267—289. 161
- §. 2. Construction der geraden und der conischen Polare, der Tangente und des Krümmungskreises, art. 290—310 . . . 167

**Vierter Abschnitt.**

## Die Poloconik einer Geraden.

- §. 1. Definitionen der Poloconik, art. 311—315 . . . . . 178
- §. 2. Fernere Eigenschaften derselben, art. 316—326 . . . . . 182
- §. 3. Poloconiken, die aus Geradenpaaren bestehen, art. 327—330. 186

**Fünfter Abschnitt.**

## Die gemischte Poloconik zweier Geraden.

Definition und Eigenschaften derselben, art. 331—338 . . 187

## Sechster Abschnitt.

## Wendepuncte, Wendetangenten, harmonische Polaren.

- §. 1. Eigenschaften der Schnittpuncte einer Curve 3. O. mit Geraden, welche durch einen Wendepunct gelegt sind, art. 339—351 . . . . . 190
- §. 2. Die Geraden, auf denen die Wendepuncte vertheilt liegen. — Syzygetischer Curvenbüschel 3. O., art. 352—359 . . . 192
- §. 3. Schnittpuncte der harmonischen Polaren unter einander und mit den Wendetangenten, art. 360—373 . . . . . 200

## Siebenter Abschnitt.

## Tangenten aus Curvenpuncten. Correspondirende Puncte und Punctepaare. Punctquadrupel.

- §. 1. Das constante Doppelverhältniss der vier von einem Curvenpuncte ausgehenden Tangenten, art. 374—377 . . . . . 205
- §. 2. Die Ecken eines vollständigen Vierseits als correspondirende Puncte, art. 378—382 . . . . . 207
- §. 3. Die Geraden, auf denen die Berührungspuncte der von drei in gerader Linie liegenden Curvenpuncten ausgehenden Tangenten vertheilt liegen, art. 383—390 . . . . . 210
- §. 4. Tangenten aus zwei Curvenpuncten. Die Verbindungslinien ihrer Schnittpuncte, art. 391—399 . . . . . 216
- §. 5. Die Curve 3. O. als geometrischer Ort der Berührungspuncte der Tangenten, welche von einem festen Puncte an die Kegelschnitte eines Büschels gehen. Die Curve gegeben durch ein Punctquadrupel und den zugehörigen Tangentialpunct, art. 400—423 . . . . . 224
- §. 6. Die Curve 3. O. als geometrischer Ort des Scheitels einer Strahleninvolution, deren Strahlen nach sechs festen Puncten gehen. Correspondirende Punctepaare, art. 424—428 . . . 232

## Achter Abschnitt.

## Conjugirte Pole der Hesse'schen Curve.

- §. 1. Die Hesse'sche Curve in Beziehung auf ein Kegelschnittnetz, art. 429—435 . . . . . 235
- §. 2. Definition der conjugirten Pole der Hesse'schen Curve, art. 436—440 . . . . . 239
- §. 3. Eigenschaften der conjugirten Pole, art. 441—457 . . . . . 241
- §. 4. Fernere Eigenschaften, art. 458—464 . . . . . 246
- §. 5. Die conjugirten Pole der Hesse'schen Curve in Verbindung mit den vier Polen einer Geraden in Bezug auf die Fundamentalcurve, art. 465—482 . . . . . 248

Inhalt.	IX Seite
§. 6. Jede Curve 3. O. kann auf dreifache Art als eine Hesse'sche Curve betrachtet werden. Eintheilung der conjugirten Pole in drei Systeme. Construction einer Curve 3. O. mit Hülfe der conjugirten Pole, art. 483—488 . . . . .	255
§. 7. Conjugirte Pole desselben Systems und verschiedener Systeme, art. 489—495 . . . . .	261

## Neunter Abschnitt.

### Die Cayley'sche Curve.

§. 1. Definition derselben. Die Tangenten der Cayley'schen Curve, art. 496—512 . . . . .	264
§. 2. Die Ordnung der Cayley'schen Curve. Die Punkte, die sie mit der Hesse'schen Curve und mit der Fundamentalcurve gemeinschaftlich hat; ihre Rückkehrtangenten, art. 513—516.	270

## Zehnter Abschnitt.

### Der begleitende Kegelschnitt.

Definition und Eigenschaften desselben, art. 517—525 . . .	273
--	-----

## Elfter Abschnitt.

Die Poloconik einer Geraden in Verbindung mit der Hesse'schen Curve. Kegelschnitte, welche eine Curve dritter Ordnung in drei Punkten berühren.

§. 1. Die aus Geradenpaaren bestehenden Poloconiken, art. 526—531 . . . . .	276
§. 2. Die Poloconik einer Geraden berührt die Hesse'schen Curve in drei Punkten, art. 532—539 . . . . .	278
§. 3. Jeder eine Curve 3. O. in drei Punkten berührende Kegelschnitt kann als die Poloconik einer Geraden betrachtet werden. Eintheilung dieser Kegelschnitte in drei Systeme, art. 540—547 . . . . .	280
§. 4. Kegelschnitte, die eine Curve 3. O. sechspunctig berühren, art. 548—555 . . . . .	283

## Zwölfter Abschnitt.

Kegelschnitte, welche eine Curve dritter Ordnung dreipunctig berühren (osculiren).

§. 1. Inflexionsgruppen und Inflexionstrippel, art. 556—577 . . .	286
§. 2. Osculirende Kegelschnitte, art. 578—586 . . . . .	300
DURKOS, Curven dritter Ordnung. *	

## Dreizehnter Abschnitt.

## Curvenbüschel dritter Ordnung.

- |       |   |     |
|-------|---|-----|
| §. 1. | Die Doppelpuncte, welche in einem durch sieben Puncte bestimmten Curvennetze und in einem Curvenbüschel vorkommen, art. 587—594 . . . . .   | 304 |
| §. 2. | Curvenbüschel, deren Curven drei feste Geraden in den nämlichen Puncten berühren und dieselben ausserdem in den nämlichen Puncten schneiden, art. 595—606 . . . . .   | 311 |
| §. 3. | Die cubische Involution, welche die Curven eines Büschels 3. O. auf einer Geraden erzeugen, art. 607—611 . . . . .  | 320 |
| §. 4. | Syzygetische Curvenbüschel 3. O., art. 612—630 . . . . .  | 322 |
| §. 5. | Projectivische Beziehung zwischen der cubischen Involution und der Punctreihe, welche von den Curven eines syzygetischen Büschels und deren Wendetangenten auf einer harmonischen Polare erzeugt werden, art. 631—634 . . . . . | 331 |

# Alphabetisches Verzeichniss der vorkommenden Kunstausdrücke.

---

(Die Zahlen beziehen sich auf die Artikel.)

- Aequianharmonische Curve 3. O. 633.
- Aequianharmonische Punkte. 26.
- Basis einer Steiner'schen Verwandtschaft. 200.
- Basispunkte eines Curvenbüschels. 145.
- Basispunkte eines Kegelschnittbüschels. 105.
- Begleitender Kegelschnitt. 517.
- Begleitender Punct. 230.
- Begleiterinn einer Geraden. 230.
- Berührung, mehrpunktige. 215.
- Bezeichnung  $\Delta_y^k(u_x)$ . 1.
- Bezeichnung der Ecken des Fundamentaldreiecks mit I. II. III. 13.
- Bezeichnung der Projectivität  $\overline{\wedge}$ . 72.
- Bezeichnung  $u_{hk} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k}$ . 152.
- Bezeichnung  $H(u)$ . 152<sup>a</sup>.
- Cayley'sche Curve. 496.
- Conische Polare einer Geraden. 311.
- Conische Polare eines Punctes. 171.
- Conjugirte Pole der Hesse'schen Curve. 438.
- Conjugirte Pole einer Curve 3. O. 485.
- Conjugirte Pole in Beziehung auf einen Kegelschnitt. 94.
- Conjugirte Pole in Beziehung auf einen Kegelschnittbüschel. 111.
- Conjugirte Pole in Beziehung auf ein Kegelschnittnetz. 431.
- Conjugirter Punct einer Curve. 153.
- Conjugirte Punkte einer Involution. 40.
- Conjugirtes Dreieck zu einem Kegelschnitt. 101.
- Connexe Inflexionsgruppen. 571.
- Connexe Inflexionstripel. 558.
- Correspondirende Punkte. 378.
- Correspondirende Punctepaare. 426.
- Correspondirende Tangenten der Cayley'schen Curve. 505.
- Cubische Involution. 50.
- Curvenbüschel. 145.
- Curvennetz. 195.
- Doppelpunkte aufeinander liegender projectivischer Punctreihen. 47.
- Doppelpunkte einer Curve. 150.
- Doppelpunkte einer Involution. 40. 47.
- Doppelstrahlen. 64.

XII Alphabetisches Verzeichniss der vorkommenden Kunstausdrücke.

Doppelverhältniss. 20.  
Einfache Curve. 131.  
Fundamentale Doppelverhältnisse. 24.  
Gegenpuncte projectivischer Punctreihen. 36.  
Gegenüberliegender Punct zu vier Puncten einer Curve 3. O. 239.  
Gemischte gerade Polare zweier Puncte. 275.  
Gemischte Poloconik zweier Geraden. 333.  
Gerade Polare. 171.  
Harmonische Centren. 168.  
Harmonische Curve 3. O. 633.  
Harmonische Polare eines Wendepunctes. 279.  
Harmonische Puncte. 25.  
Harmonische Strahlen. 59.  
Hauptpuncte einer Steiner'schen Verwandtschaft. 200.  
Hesse'sche Curve. 152<sup>a</sup>.  
Hesse'sche Curve eines Kegelschnittnetzes. 432.  
Hesse'sche Determinante. 152<sup>a</sup>.  
Inflexionsgerade. 557.  
Inflexionsgruppe. 556.  
Inflexionspunct. 155.  
Inflexionstripel. 557.  
Involution. 40.  
Involution auf einem Kegelschnitte. 125.  
Involution höheren Grades. 47.  
Involutorisches Entsprechen. 41.  
Isolirter Punct einer Curve. 153.  
Kegelschnittbüschel. 105.  
Leitcurven eines Netzes. 195.  
Mehrpunctige Berührung. 215.  
Mittelpuncte eines Curvenbüschels 3. O. 605.  
Perspectivische Lage. 68. 70.  
Polaren. 168.  
Polares Geradenpaar. 268.  
Pol und Polare in Bezug auf einen Kegelschnitt. 95.  
Poloconik einer Geraden. 311.  
Projectivität, Bezeichnung derselben  $\overline{\wedge}$ . 72.  
Punctquadrupel. 378.  
Rückkehrpunct, Rückkehrtangente. 153.  
Steiner'sche Verwandtschaft. 200.  
Syzygetischer Curvenbüschel. 355.  
Syzygetisches Dreieit. 612.  
Tangentialpunct, erster, zweiter, etc. 214.  
Unendlich ferne Gerade. 16.  
Wendepunct, Wendetangente. 155.

---

# Erste Abtheilung.

---

## Hülfsätze.





## Erster Abschnitt.

### Algebraische Hülfsätze.

#### §. 1.

1. Bedeutet  $u(x_1, x_2, x_3)$  oder kürzer geschrieben  $u_x$  eine ganze rationale homogene Function  $n^{ten}$  Grades von den Variabeln  $x_1, x_2, x_3$ , und bezeichnet man mit  $y_1, y_2, y_3$  drei neue Variabele, so soll unter dem Zeichen

$$\Delta_y(u_x)$$

die durch die Gleichung

$$\Delta_y(u_x) = y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u}{\partial x_3}$$

definirte Operation, und unter dem Zeichen

$$\Delta_y^k(u_x)$$

das Resultat der  $k$ -maligen Wiederholung dieser Operation verstanden werden. (*Salmon. Higher plane Curves*, pag. 56.)

Alsdann unterscheiden sich die Ausdrücke

$$\Delta_y(u_x), \Delta_y^2(u_x), \Delta_y^3(u_x), \text{ etc.}$$

von den totalen Differentialen  $du, d^2u, d^3u$ , etc. nur dadurch, dass die Grössen  $y_1, y_2, y_3$  an Stelle der Differentiale  $dx_1, dx_2, dx_3$  getreten sind. Es ist demnach

$$\Delta_y(u_x) = \Sigma y_i \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \Delta_y^2(u_x) = \Sigma \Sigma y_h y_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_i},$$

$$\Delta_y^3(u_x) = \Sigma \Sigma \Sigma y_h y_i y_k \frac{\partial^3 u}{\partial x_h \partial x_i \partial x_k}, \quad \text{u. s. w.,}$$

wobei jedem der Indices  $h, i, k$ , etc. die Werthe 1, 2, 3 beizulegen sind.

2. Hieraus folgen sofort folgende Eigenschaften dieser Ausdrücke  $\Delta$ :

$$(1) \quad \dots \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ \Delta_y^k(u_x) \right] = \Delta_y^k \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right)$$

$$(2) \quad \dots \frac{\partial}{\partial y_i} \left[ \Delta_y^k(u_x) \right] = k \Delta_y^{k-1} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right). *$$

---

\*) Die Richtigkeit der ersten Formel leuchtet unmittelbar ein; für die zweite ist eine Ableitung in [5] mitgetheilt.

Bezeichnet ferner  $v_x$  eine zweite Function von derselben Natur wie  $u_x$ , so ist

$$\mathcal{A}_y(u_x v_x) = u_x \mathcal{A}_y(v_x) + v_x \mathcal{A}_y(u_x).$$

3. Wenn man die Operation  $\mathcal{A}$  auf's Neue auf einen Ausdruck von der Form  $\mathcal{A}_y^k(u_x)$  anwendet, so sollen die dabei auszuführenden Differentiationen sich auf die durch den Buchstaben  $x$ , welcher als Index bei  $u$  steht, bezeichneten Variablen beziehen. In diesem Sinne ist

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_y^k(\mathcal{A}_y^l(u_x)) &= \mathcal{A}_y^{k+l}(u_x) \\ \mathcal{A}_y^l(\mathcal{A}_y^k(u_x)) &= \mathcal{A}_y^k(\mathcal{A}_y^l(u_x)),\end{aligned}$$

d. h. wendet man die Operation  $k$  Mal mit den Grössen  $y$  und  $l$  Mal mit den Grössen  $z$  an, so ist es gleichgültig, in welcher Ordnung dies geschieht. So ist z. B.

$$\mathcal{A}_z^2(u_x) = \Sigma \Sigma z_h z_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k},$$

und dann

$$\mathcal{A}_y(\mathcal{A}_z^2(u_x)) = \Sigma \Sigma \Sigma y_i z_h z_k \frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_h \partial x_k}.$$

Dasselbe Resultat erhält man aber auch, wenn man aus

$$\mathcal{A}_y(u_x) = \Sigma y_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \text{ bildet } \mathcal{A}_z^2(\mathcal{A}_y(u_x)).$$

4. Entwickelt man die Function

$$U = u(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2, x_3 + \lambda y_3)$$

nach Potenzen von  $\lambda$ , so erhält man

$$U = u_x + \lambda \mathcal{A}_y(u_x) + \frac{\lambda^2}{2!} \mathcal{A}_y^2(u_x) + \frac{\lambda^3}{3!} \mathcal{A}_y^3(u_x) + \dots + \frac{\lambda^n}{n!} \mathcal{A}_y^n(u_x).$$

Dies ergibt sich mit Rücksicht auf [1] unmittelbar, wenn man sich erinnert, dass die Taylor'sche Reihe in folgender Form geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned}u(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) \\ = u_x + du + \frac{d^2 u}{2!} + \frac{d^3 u}{3!} + \dots + \frac{d^n u}{n!}.\end{aligned}$$

5. Wenn man in den Ausdrücken  $\mathcal{A}$  die Variablen  $x$  und  $y$  mit einander vertauscht, so gilt die Beziehung

$$\frac{\mathcal{A}_y^k(u_x)}{k!} = \frac{\mathcal{A}_x^{n-k}(u_y)}{(n-k)!},$$

d. h. es ist der Reihe nach

$$u_x = \frac{\Delta_x^n(u_y)}{n!}, \quad \Delta_y(u_x) = \frac{\Delta_y^{n-1}(u_y)}{(n-1)!}, \quad \dots, \\ \frac{\Delta_y^{n-1}(u_x)}{(n-1)!} = \Delta_x(u_y), \quad \frac{\Delta_y^n(u_x)}{n!} = u_y$$

Beweis. Setzt man

$$U = u(\mu x_1 + \lambda y_1, \mu x_2 + \lambda y_2, \mu x_3 + \lambda y_3),$$

so kann man dies in doppelter Weise nach Potenzen von  $\mu$  und  $\lambda$  entwickeln. Zieht man nämlich einmal  $\mu^n$  als Factor heraus, wodurch man

$$U = \mu^n \cdot u \left( x_1 + \frac{\lambda}{\mu} y_1, x_2 + \frac{\lambda}{\mu} y_2, x_3 + \frac{\lambda}{\mu} y_3 \right)$$

erhält, so kann man dies nach [4] nach Potenzen von  $\frac{\lambda}{\mu}$  entwickeln und erhält, wenn man wieder die Multiplication mit  $\mu^n$  vollzieht

$$U = \mu^n u_x + \mu^{n-1} \lambda \Delta_y(u_x) + \frac{\mu^{n-2} \lambda^2}{2!} \Delta_y^2(u_x) + \dots \\ + \frac{\mu \lambda^{n-1}}{(n-1)!} \Delta_y^{n-1}(u_x) + \frac{\lambda^n}{n!} \Delta_y^n(u_x).$$

Wenn man dagegen  $\lambda^n$  als Factor herauszieht, dann den entstehenden Ausdruck

$$U = \lambda^n \cdot u \left( \frac{\mu}{\lambda} x_1 + y_1, \frac{\mu}{\lambda} x_2 + y_2, \frac{\mu}{\lambda} x_3 + y_3 \right)$$

nach Potenzen von  $\frac{\mu}{\lambda}$  entwickelt und darauf wieder mit  $\lambda^n$  multiplicirt, so erhält man

$$U = \lambda^n u_y + \mu \lambda^{n-1} \Delta_x(u_y) + \frac{\mu^2 \lambda^{n-2}}{2!} \Delta_x^2(u_y) + \dots \\ + \frac{\mu^{n-1} \lambda}{(n-1)!} \Delta_x^{n-1}(u_y) + \frac{\mu^n}{n!} \Delta_x^n(u_y).$$

Da nun beide Entwicklungen identisch sein müssen, so ergibt die Vergleichung der gleichnamigen Glieder die obigen Beziehungen.

**Zusatz.** Hieraus erhellt die Richtigkeit der Formel (2) in [2]. Vertauscht man nämlich  $x$  mit  $y$ , so kann man die Formel (1) anwenden und erhält

$$\frac{\partial}{\partial y_i} [\mathcal{A}_y^k(u_x)] = \frac{k!}{(n-k)!} \frac{\partial}{\partial y_i} [\mathcal{A}_x^{n-k}(u_y)] = \frac{k!}{(n-k)!} \mathcal{A}_x^{n-k} \left( \frac{\partial u}{\partial y_i} \right).$$

Da nun aber  $\frac{\partial u}{\partial y_i}$  vom Grade  $n-1$  ist, und  $n-1-(n-k)=k-1$  wird, so hat man

$$\frac{1}{(n-k)!} \mathcal{A}_x^{n-k} \left( \frac{\partial u}{\partial y_i} \right) = \frac{1}{(k-1)!} \mathcal{A}_y^{k-1} \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right),$$

woraus die gesuchte Formel folgt, wenn man noch berücksichtigt, dass  $\frac{k!}{(k-1)!} = k$  ist.

6. Wenn in dem Ausdrucke  $\mathcal{A}_y^k(u_x)$  an Stelle der Grössen  $y_i$  die  $x_i$  gesetzt werden, so finden folgende Beziehungen statt:

$$\mathcal{A}_x(u_x) = n \cdot u_x, \quad \mathcal{A}_x^2(u_x) = n(n-1)u_x, \text{ etc.}$$

$$\mathcal{A}_x^k(u_x) = n(n-1) \dots (n-k+1)u_x.$$

(Euler's Satz über homogene Functionen).

Beweis. Da  $u$  eine homogene Function  $n^{\text{ten}}$  Grades ist, so ist für jede beliebige Grösse  $t$

$$u(x_1 t, x_2 t, x_3 t) = t^n u_x;$$

setzt man also  $t = 1 + \lambda$ , so folgt

$$u(x_1 + \lambda x_1, x_2 + \lambda x_2, x_3 + \lambda x_3) = (1 + \lambda)^n u_x.$$

Entwickelt man nun beiderseits nach Potenzen von  $\lambda$ , was links nach [4], und rechts nach dem binomischen Satze geschieht, so erhält man

$$\begin{aligned} & u_x + \lambda \mathcal{A}_x(u_x) + \frac{\lambda^2}{2!} \mathcal{A}_x^2(u_x) + \dots + \frac{\lambda^k}{k!} \mathcal{A}_x^k(u_x) + \dots \\ &= u_x + \lambda n u_x + \lambda^2 \frac{n(n-1)}{2!} u_x + \dots + \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \lambda^k u_x + \dots \end{aligned}$$

und hieraus durch Vergleichung der gleichnamigen Coefficienten die obigen Beziehungen. (Serret. Algèbre sup. II. pag. 567.)

## §. 2.

7. Eliminirt man aus zwei homogenen Gleichungen zwischen drei Variablen  $x, y, z$  resp. von den Graden  $m$  und  $n$ , eine dieser Variablen, z. B.  $z$ , so ist das Resultat der Elimination eine homogene Gleichung zwischen  $x$  und  $y$  vom Grade  $mn$ .

Beweis. Bezeichnet man mit  $u_h$  und  $v_h$  homogene Functionen  $h^{\text{ten}}$  Grades der Variablen  $x$  und  $y$ , so kann man die beiden gegebenen Gleichungen so schreiben:

$$(1) \quad u_0 z^n + u_1 z^{n-1} + \dots + u_{n-1} z + u_n = 0$$

$$(2) \quad v_0 z^m + v_1 z^{m-1} + \dots + v_{m-1} z + v_m = 0.$$

Multiplicirt man nun die (1) nach und nach mit  $z^{m-1}, z^{m-2}, \dots, z, 1$  und die (2) mit  $z^{n-1}, z^{n-2}, \dots, z, 1$ , so erhält man im Ganzen  $n+m$  Gleichungen, in welchen die  $n+m-1$  Grössen  $z^{n+m-1}, z^{n+m-2}, \dots, z$  linear vorkommen. Die Variable  $z$  wird daher dadurch eliminirt, dass man die Determinante  $D$  aus den Coefficienten der Potenzen von  $z$  in jenen  $n+m$  Gleichungen gleich Null setzt. Ist z. B.  $n=3, m=2$ , so heissen die Gleichungen (1) und (2)

$$\begin{aligned} u_0 z^3 + u_1 z^2 + u_2 z + u_3 &= 0 \\ v_0 z^2 + v_1 z + v_2 &= 0. \end{aligned}$$

Multiplicirt man die erstere mit  $z, 1$  und die zweite mit  $z^2, z, 1$ , so erhält man

$$\begin{aligned} u_0 z^4 + u_1 z^3 + u_2 z^2 + u_3 z &= 0 \\ u_0 z^3 + u_1 z^2 + u_2 z + u_3 &= 0 \\ v_0 z^4 + v_1 z^3 + v_2 z^2 &= 0 \\ v_0 z^3 + v_1 z^2 + v_2 z &= 0 \\ v_0 z^2 + v_1 z + v_2 &= 0. \end{aligned}$$

Die Elimination von  $z^4, z^3, z^2, z$  giebt dann

$$D = \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 & 0 \\ 0 & u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ v_0 & v_1 & v_2 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & v_1 & v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 & v_1 & v_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Um nun zu zeigen, dass die so gewonnene Determinante  $D$  eine homogene Function von  $x$  und  $y$  vom Grade  $nm$  ist, substituirt man darin  $tx$  und  $ty$  statt  $x$  und  $y$ . Dann gehen  $u_h$  und  $v_h$  über in  $t^h u_h$  und  $t^h v_h$ . Bezeichnet man die so abgeänderte Determinante mit  $D'$ , so wird in unserem Beispiele

$$D' = \begin{vmatrix} u_0 & t u_1 & t^2 u_2 & t^3 u_3 & 0 \\ 0 & u_0 & t u_1 & t^2 u_2 & t^3 u_3 \\ v_0 & t v_1 & t^2 v_2 & 0 & 0 \\ 0 & v_0 & t v_1 & t^2 v_2 & 0 \\ 0 & 0 & v_0 & t v_1 & t^2 v_2 \end{vmatrix}.$$

Man multiplicire nun, um in allen Elementen einer Columnne denselben Exponenten von  $t$  zu erhalten, die Zeilen der  $u$  der

Reihe nach mit  $1, t, t^2, \dots, t^{m-1}$ , und die Zeilen der  $v$  mit  $1, t, t^2, \dots, t^{n-1}$ ; dann hat die Potenz von  $t$ , mit welcher  $D'$  im Ganzen multiplicirt ist, den Exponenten

$$1+2+\dots+(m-1)+1+2+\dots+(n-1)=\frac{m(m-1)}{2}+\frac{n(n-1)}{2},$$

man erhält dadurch

$$t^{\frac{m(m-1)+n(n-1)}{2}} D'.$$

Durch diese Multiplication haben nun aber die Columnen von  $D'$  der Reihe nach folgende Potenzen von  $t$  als gemeinschaftliche Factoren erhalten:

$$1, t, t^2, \dots, t^{n+m-1}.$$

Zieht man diese alle heraus, so erhält man als Factor der ursprünglichen Determinante  $D$  eine Potenz von  $t$  mit dem Exponenten

$$1+2+\dots+(n+m-1)=\frac{(n+m)(n+m-1)}{2}=nm+\frac{m(m-1)+n(n-1)}{2}.$$

Daher ergibt sich

$$t^{\frac{m(m-1)+n(n-1)}{2}} D' = t^{nm+\frac{m(m-1)+n(n-1)}{2}} D$$

oder

$$D' = t^{nm} D,$$

und folglich ist  $D$  in der That eine homogene Function vom Grade  $nm$ .

8. Ist  $u$  eine homogene Function  $n^{\text{ten}}$  Grades von  $x$  und  $y$  und daher  $u = 0$  eine Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades für die Unbekannte  $\frac{x}{y}$ , so besteht die Bedingung, dass diese Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, in den Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

Beweis. Setzt man  $\frac{x}{y} = \xi$  und bezeichnet die oben erwähnte Gleichung mit  $f(\xi) = 0$ , so ist

$$u = y^n f(\xi).$$

Nun hat die Gleichung  $f(\xi) = 0$  zwei gleiche Wurzeln, wenn gleichzeitig  $f(\xi) = 0$  und  $\frac{df}{d\xi} = 0$  ist. Es ist aber  $\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{y}$  und daher

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^{n-1} \frac{df}{d\xi},$$

folglich können die letzten Bedingungen ersetzt werden durch



$$u = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Nach dem *Euler'schen* Satze [6] ist aber

$$u = \frac{1}{n} \left( x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

folglich ist auch  $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ . Wenn umgekehrt  $\frac{\partial u}{\partial x}$  und  $\frac{\partial u}{\partial y}$  gleichzeitig verschwinden, so ist auch  $u=0$  und daher verschwinden auch  $f(\xi)$  und  $\frac{df}{d\xi}$  gleichzeitig.

9. Um nach diesem Satze die Bedingung zu finden, unter welcher die cubische Gleichung

$$(1) \quad ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

zwei gleiche Wurzeln hat, setze man

$$u = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3$$

und bilde

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = bx^2 + 2cxy + 3dy^2 = 0.$$

Eliminirt man hieraus einmal  $x^2$  und dann  $y^2$ , so erhält man nach Unterdrückung der Factoren  $y$  und  $x$

$$(2b^2 - 6ac)x + (bc - 9ad)y = 0$$

$$(bc - 9ad)x + (2c^2 - 6bd)y = 0,$$

und hieraus durch Elimination von  $x$  und  $y$

$$(bc - 9ad)^2 - 4(b^2 - 3ac)(c^2 - 3bd) = 0.$$

Dies ist die gesuchte Bedingung für die Gleichheit zweier Wurzeln der Gleichung (1). Durch Entwicklung und Division mit 3 lässt sie sich auch in die Form

$$b^2(4bd - c^2) + a(4c^3 - 18bcd + 27ad^2) = 0$$

bringen. (*Salmon*. pag. 296.)

### §. 3.

10. Bedeuten 1,  $\alpha$ ,  $\alpha^2$  die Cubikwurzeln der Einheit, so ist identisch

$$(x + y + z)(x + \alpha y + \alpha^2 z)(x + \alpha^2 y + \alpha z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz.$$

Dies ergibt sich unmittelbar durch Ausführung der Multiplikation unter Berücksichtigung der Gleichungen  $\alpha^3 = 1$  und  $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$ .

Da der rechts stehende Ausdruck in Beziehung auf  $x, y, z$  symmetrisch ist, so ändert sich auch der links stehende Ausdruck nicht, wenn man  $x, y, z$  mit einander vertauscht. Daher ist gleichzeitig

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)(x + ay + a^2z)(x + a^2y + az) \\ &= (x + y + z)(ax + y + a^2z)(a^2x + y + az) \\ &= (x + y + z)(ax + a^2y + z)(a^2x + ay + z). \end{aligned}$$

Substituirt man in der ersten dieser Gleichungen  $ax$  für  $x$ , so folgt

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3axyz &= (ax + y + z)(ax + ay + a^2z)(ax + a^2y + az) \\ &= a^2(ax + y + z)(x + ay + z)(x + y + az), \end{aligned}$$

und wenn man  $a^2x$  für  $x$  substituirt,

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 + z^3 - 3a^2xyz &= (a^2x + y + z)(a^2x + ay + a^2z)(a^2x + a^2y + az) \\ &= a(a^2x + y + z)(x + a^2y + z)(x + y + a^2z), \end{aligned}$$

## Zweiter Abschnitt.

### Hülfsätze aus der Geometrie der geraden Linie.

#### §. 1.

11. Bedeuten  $\xi$  und  $\eta$  die recht- oder schiefwinkligen Coordinaten eines Puncts, und besteht zwischen diesen eine lineare Gleichung:  $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma = 0$ , so ist der Punct  $(\xi, \eta)$  veränderlich und beschreibt eine gerade Linie. Bezeichnet man nun mit  $x_1, x_2, x_3$  drei Grössen, welche linearen Functionen von  $\xi, \eta$  proportional sind, indem man setzt

$$x_1 : x_2 : x_3 = \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1 : \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2 : \alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3,$$

oder mit Anwendung eines Proportionalitätsfactors  $\varrho$

$$\begin{aligned} (1) \quad x_1 &= \varrho(\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1) \\ x_2 &= \varrho(\alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2) \\ x_3 &= \varrho(\alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3), \end{aligned}$$

so bemerkt man sogleich, dass die Werthe von  $\xi$  und  $\eta$  daraus bestimmt werden können, so bald die beiden Verhältnisse der drei Grössen  $x_1, x_2, x_3$  gegeben sind. Durch diese Verhältnisse wird also ein Punct in der Ebene fixirt. Besteht

aber zwischen ihnen eine lineare, und daher zwischen  $x_1, x_2, x_3$  eine homogene lineare Gleichung von der Form

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0,$$

so erhält man, wenn man hierin die Ausdrücke (1) substituirt, eine lineare Gleichung zwischen  $\xi, \eta$ . Der von den Verhältnissen von  $x_1, x_2, x_3$  abhängige Punkt ist also alsdann veränderlich, muss aber eine gewisse Gerade beschreiben. Bezeichnet man ferner mit  $X_1, X_2, X_3$  drei homogene lineare Functionen von  $x_1, x_2, x_3$ , indem man setzt

$$\begin{aligned} X_1 &= a_1' x_1 + a_2' x_2 + a_3' x_3 \\ (2) \quad X_2 &= a_1'' x_1 + a_2'' x_2 + a_3'' x_3 \\ X_3 &= a_1''' x_1 + a_2''' x_2 + a_3''' x_3, \end{aligned}$$

(worin die rechten Theile ebenfalls mit einem willkürlichen Proportionalitätsfactor behaftet sein können), so behalten die Grössen  $X_1, X_2, X_3$  die beiden vorhin von den Grössen  $x_1, x_2, x_3$  bemerkten Eigenschaften bei. Nämlich: sind die beiden Verhältnisse der  $X$  gegeben, so kann man mittelst der vorigen Gleichungen die beiden Verhältnisse der  $x$ , und dann mittelst der Gleichungen (1) die Werthe von  $\xi, \eta$  bestimmen. Die beiden Verhältnisse der  $X$  bestimmen also die Lage eines Punktes. Besteht ferner zwischen den  $X$  eine homogene lineare Gleichung  $b_1 X_1 + b_2 X_2 + b_3 X_3 = 0$ , so wird diese durch Substitution der Ausdrücke (2) eine homogene lineare Gleichung zwischen den  $x$ , und durch Substitution der Ausdrücke (1) eine lineare Gleichung zwischen  $\xi$  und  $\eta$ . Wenn demnach zwischen den  $X$  eine homogene lineare Gleichung besteht, so beschreibt der durch die Verhältnisse der  $X$  bestimmte Punkt eine gerade Linie. Man sieht übrigens, dass die Grössen  $X$  von den  $x$  nicht wesentlich verschieden sind; denn substituirt man in (2) die Ausdrücke (1), so werden die  $X$  lineare Functionen von  $\xi, \eta$ , die sich von den  $x$  nur durch die Werthe der Constanten unterscheiden.

**12.** Hieraus fliesst folgende Definition: Unter homogenen Punktcoordinaten werden irgend drei Grössen  $x_1, x_2, x_3$  verstanden, welche folgende zwei Eigenschaften haben, dass 1) durch ihre beiden Verhältnisse die Lage eines Punktes in der Ebene bestimmt wird, und dass 2) der von diesen Verhältnissen abhängige Punkt eine gerade Linie beschreibt, wenn

zwischen jenen Grössen  $x_1, x_2, x_3$  eine homogene lineare Gleichung besteht. — Denn wenn diese Bedingungen erfüllt sind, kann man die Grössen  $x_1, x_2, x_3$  linearen Functionen zweier Parallelcoordinaten proportional setzen, d. h. drei Gleichungen von der Form (1) aufstellen\*).

13. Die einfachsten Gleichungen gerader Linien, die man in homogenen Punctcoordinaten bilden kann, sind die folgenden

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$$

oder nach (1) in Parallelcoordinaten ausgedrückt

$$\alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 = 0, \quad \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 = 0, \quad \alpha_3 \xi + \beta_3 \eta + \gamma_3 = 0.$$

Das von diesen Geraden gebildete Dreieck heisst das Fundamentaldreieck (Coordinatendreieck), und auf dieses beziehen sich  $x_1, x_2, x_3$  als Coordinaten eines Puncts. Die den Seiten  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$  desselben der Reihe nach gegenüberliegenden Ecken sollen künftig mit *I, II, III* bezeichnet werden. Führt man statt der  $x$  drei lineare homogene Functionen derselben,  $X$ , als Coordinaten ein, so beziehen sich diese auf ein Fundamentaldreieck, dessen Seiten sind:

$$X_1 = 0, \quad X_2 = 0, \quad X_3 = 0.$$

14. Die homogenen Coordinaten  $x_1, x_2, x_3$  eines Punctes sind von den Perpendikeln, die man von diesem Puncte auf die Seiten des Fundamentaldreieckes herablassen kann, nur durch constante Factoren verschieden; jedoch kann bei jedem der drei Perpendikel der constante Factor einen anderen Werth haben.

Beweis. Ist  $\alpha \xi + \beta \eta + \gamma = 0$  die Gleichung einer Geraden in Parallelcoordinaten, und  $\omega$  der Coordinatenwinkel, so ist die Länge  $p$  des von einem Puncte  $(\xi, \eta)$  auf diese Gerade gefällten Perpendikels (*Salmon. Anal. Geom. d. Kegelschn., deutsch von Fiedler, 2. Aufl. pag. 31.*)

$$p = \frac{\sin \omega (\alpha \xi + \beta \eta + \gamma)}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \omega}},$$

\*) Dieser Definition steht die folgende gegenüber: Unter homogenen Liniencoordinaten werden irgend drei Grössen verstanden, welche die Eigenschaften besitzen, dass 1) ihre beiden Verhältnisse die Lage einer Geraden in der Ebene bestimmen, und dass 2) die von diesen Verhältnissen abhängige Gerade sich um einen Punct dreht, wenn zwischen jenen Grössen eine homogene lineare Gleichung besteht.

oder setzt man

$$\frac{\sin \omega}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \omega}} = A,$$

so ist

$$p = A(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma).$$

Darin hängt die Grösse  $A$  nur von der Lage der Geraden; keinesweges aber von der Lage des Punctes ab, behält also für alle Puncte denselben Werth. Nimmt man nun die Seiten des Fundamentaldreiecks als die Geraden an, auf welche von dem Puncte  $(\xi, \eta)$  Perpendikel gefällt sind, indem man den Constanten  $\alpha, \beta, \gamma$  und dann auch  $A$  und  $p$  Indices beifügt, so hat man

$$p_1 = A_1(\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1)$$

$$p_2 = A_2(\alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2)$$

$$p_3 = A_3(\alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3),$$

und dann wegen der Gleichungen (1) in [11]

$$p_1 : p_2 : p_3 = A_1 x_1 : A_2 x_2 : A_3 x_3,$$

oder mit Anwendung eines Proportionalitätsfactors  $\varrho$

$$(1) \quad p_1 = \varrho A_1 x_1, \quad p_2 = \varrho A_2 x_2, \quad p_3 = \varrho A_3 x_3.$$

15. Der vorige Satz macht es möglich, über die Vorzeichen, welche den homogenen Coordinaten eines Punctes bei dessen verschiedenen Lagen beizulegen sind, etwas Bestimmtes festzusetzen. Bekanntlich wechselt das von einem Puncte auf eine Gerade gefällte Perpendikel das Vorzeichen, wenn der Punct die Gerade überschreitet. Nach den vorigen Formeln kommt daher dieselbe Eigenschaft der Coordinate  $x_i$  zu, wenn der Punct die Seite  $x_i = 0$  des Fundamentaldreiecks überschreitet. Nun theilt jede Fundamentalseite die Ebene so in zwei Theile, dass das Fundamentaldreieck sich ganz in dem einen dieser beiden Theile befindet. Daher wollen wir festsetzen, dass das von einem Puncte auf die Seite  $x_i = 0$  gefällte Perpendikel  $p_i$  dann als positiv betrachtet werden soll, wenn der Punct in demjenigen der beiden durch die Gerade  $x_i = 0$  von einander getrennten Theile liegt, in dem sich das Fundamentaldreieck befindet, negativ, wenn er in dem andern Theile liegt. Sind dann für ein bestimmtes System homogener Coordinaten die Verhältnisse der Grössen  $A$  gewählt, so bestimmen sich hiernach auch die Vorzeichen der Coordinaten.

16. Alle in unendlicher Entfernung befindlichen Punkte können als auf einer geraden Linie liegend angesehen werden, welche die unendlich ferne Gerade heisst. Die Gleichung derselben ist

$$s_1 A_1 x_1 + s_2 A_2 x_2 + s_3 A_3 x_3 = 0,$$

wenn  $s_1, s_2, s_3$  die Längen der Seiten des Fundamentaldreiecks bezeichnen.

Beweis. Um die Coordinaten des Durchschnittes zweier Geraden

$$(1) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0, \quad b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$

zu bestimmen, hat man aus diesen beiden Gleichungen die Verhältnisse der  $x$  zu berechnen. Das giebt

$$(2) \quad x_1 : x_2 : x_3 = a_2 b_3 - a_3 b_2 : a_3 b_1 - a_1 b_3 : a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Man kann aber auch noch anders verfahren. Verbindet man nämlich den Punkt  $(x_1 x_2 x_3)$  durch gerade Linien mit den Ecken des Fundamentaldreiecks, so wird dieses in drei (positive oder negative) Dreiecke zerlegt. Nennt man daher  $F$  den doppelten Inhalt des Fundamentaldreiecks, so hat man mit Berücksichtigung der in [15] gegebenen Zeichenregel

$$s_1 p_1 + s_2 p_2 + s_3 p_3 = F,$$

oder nach den Formeln (1) in [14]

$$\varrho (s_1 A_1 x_1 + s_2 A_2 x_2 + s_3 A_3 x_3) = F.$$

Man kann nun diese stets stattfindende Gleichung den Gleichungen (1) hinzufügen und dann Ausdrücke für die Coordinaten des Durchschnittspuncts selbst finden. Setzt man

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ s_1 A_1 & s_2 A_2 & s_3 A_3 \end{vmatrix} = D,$$

so giebt die Auflösung jener drei Gleichungen

$$x_1 = \frac{F}{\varrho D} (a_2 b_3 - a_3 b_2), \quad x_2 = \frac{F}{\varrho D} (a_3 b_1 - a_1 b_3),$$

$$x_3 = \frac{F}{\varrho D} (a_1 b_2 - a_2 b_1),$$

welche Ausdrücke freilich wegen des willkürlichen Factors  $\varrho$  nichts anderes besagen, als die Gleichungen (2). Sie sind aber geeignet, erkennen zu lassen, was geschieht, wenn die Geraden (1) parallel sind, also ihr Durchschnitt ins Unendliche rückt. In diesem Falle muss mindestens eine seiner Coordi-



naten unendlich gross werden, d. h. es muss  $D = 0$  sein. Allein das Verschwinden dieser Determinante ist das Resultat der Elimination der Coordinaten aus den Gleichungen

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

$$b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_3 x_3 = 0$$

$$s_1 A_1 x_1 + s_2 A_2 x_2 + s_3 A_3 x_3 = 0.$$

Daher kann ein unendlich entfernter Punct als der Durchschnitt der beiden parallelen Geraden (1) mit der Geraden

$$s_1 A_1 x_1 + s_2 A_2 x_2 + s_3 A_3 x_3 = 0$$

betrachtet werden, und da diese letzte ungeändert bleibt, wenn man die parallelen Geraden variirt, so können alle unendlich fernen Punkte als auf dieser Geraden liegend angesehen werden.

17. Unter den unendlich vielen Arten homogener Coordinaten, welche denkbar sind, und die aus der Verschiedenheit der Werthe von  $A_1, A_2, A_3$  in [14] entstehen, sind besonders drei hervorzuheben:

1) Hessesche homogene Coordinaten. Diese sind die einfachsten unter allen und entstehen, wenn die Verhältnisse  $\frac{x_1}{x_3}$  und  $\frac{x_2}{x_3}$  statt der Parallelcoordinaten eingeführt werden. Da dann für alle im Unendlichen liegenden Puncte  $x_3 = 0$  ist, so ist dies die Gleichung der unendlich fernen Geraden; das Fundamentaldreieck besteht daher hier aus den beiden Coordinatenaxen und der unendlich fernen Geraden.

2) Perpendikelverhältnisse. Die Verhältnisse der von einem Puncte auf die Seiten des Fundamentaldreieckes gefällten Perpendikel werden direct als die Coordinaten dieses Punctes betrachtet. Die Coefficienten  $A_1, A_2, A_3$  werden daher dann einander gleich angenommen, und dadurch wird die Gleichung der unendlich fernen Geraden:

$$s_1 x_1 + s_2 x_2 + s_3 x_3 = 0.$$

3) Schnittverhältnisse. Diese wurden von *Chasles* aufgestellt (*Géométrie supérieure*. pag. 341. *Cremona* art. 36), hängen aber auf's Innigste mit den Variabeln zusammen, auf denen der barycentrische Calcul von *Möbius* beruht. Sie bestehen in Folgendem. Zieht man durch den Punct  $x$ , dessen Coordinaten  $x_1, x_2, x_3$  sind, und durch die Ecken *I, II, III* des Fundamentaldreieckes drei Gerade, welche die gegenüber-

liegenden Seiten in  $l, m, n$  schneiden, so werden die Verhältnisse der Abschnitte, in welche die Fundamentalseiten durch die letzteren Punkte geteilt werden, als die Coordinaten betrachtet, indem man setzt

$$In : nII = x_2 : x_1, \quad II l : l III = x_3 : x_2, \quad III m : m I = x_1 : x_3.$$

Dies ist gestattet, weil nach dem Satze von *Ceva* (*Chasles. Geschichte der Geometrie. Deutsch von Sohncke. pag. 301*)

$$\frac{In \cdot III l \cdot III m}{nII \cdot l III \cdot mI} = 1$$

ist. Um die Beziehung dieser Schnittverhältnisse zu den

Perpendikeln zu erfahren, sei

(Fig. 1.)  $In = q_2, \quad nII = q_1,$

$II III n = \alpha, \quad n III I = \beta,$  so hat

man

$$\frac{q_1}{III n} = \frac{\sin \alpha}{\sin II}, \quad \frac{q_2}{III n} = \frac{\sin \beta}{\sin I},$$

also

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin I}{\sin II}.$$

Bedeutend aber  $p_1, p_2$  die von  $x$  auf die Seiten  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 0$  gefällten Perpendikel, und  $s_1, s_2$  die Längen dieser Seiten, so ist

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{p_1}{p_2}, \quad \frac{\sin I}{\sin II} = \frac{s_1}{s_2}$$

und daher

$$\frac{x_1}{x_2} = \frac{s_1 p_1}{s_2 p_2}.$$

Demnach folgt

$$x_1 : x_2 : x_3 = s_1 p_1 : s_2 p_2 : s_3 p_3,$$

oder

$$p_1 : p_2 : p_3 = \frac{x_1}{s_1} : \frac{x_2}{s_2} : \frac{x_3}{s_3}.$$

Die Coefficienten  $A$  in [14] werden daher in diesem Falle

$$A_1 : A_2 : A_3 = \frac{1}{s_1} : \frac{1}{s_2} : \frac{1}{s_3},$$

und damit erhält man die Gleichung der unendlich fernen Geraden:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0.$$

18. Bezeichnet man mit  $x_1, x_2, x_3$  und  $y_1, y_2, y_3$  die homogenen Coordinaten zweier Punkte  $x$  und  $y$ , so sind die Grössen

$$z_1 = x_1 + \lambda y_1, \quad z_2 = x_2 + \lambda y_2, \quad z_3 = x_3 + \lambda y_3$$

für jeden Werth von  $\lambda$  die Coordinaten eines Punktes, der auf der Verbindungslinie  $xy$  liegt.

Beweis. Bei veränderlichen  $z$  ist

$$az_1 + bz_2 + cz_3 = 0$$

die Gleichung einer Geraden. Geht diese durch die Punkte  $x$  und  $y$ , so ist auch

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$$

$$ay_1 + by_2 + cy_3 = 0.$$

Durch Elimination von  $a, b, c$  erhält man daraus

$$\begin{vmatrix} z_1 & z_2 & z_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0,$$

welches bei veränderlichen  $z$  die Gleichung der Geraden  $xy$  ist. Diese Determinante verschwindet aber nicht bloss, wenn man statt der  $z$  die  $x$  oder  $y$  substituirt, sondern auch dann, wenn man setzt

$$z_i = x_i + \lambda y_i \quad (i = 1, 2, 3);$$

daher sind dies die Coordinaten eines Punktes der Geraden  $xy$ .

19. Bedeuten  $z_i = x_i + \lambda y_i$  die Coordinaten eines Punktes  $z$ , welcher [18] auf der Verbindungslinie  $xy$  der Punkte  $x$  und  $y$  liegt, so ist die Grösse  $\lambda$  proportional dem Verhältnisse der Abschnitte  $xz$  und  $yz$ , in welche die Strecke  $xy$  durch den Punkt  $z$  getheilt wird, nämlich es ist

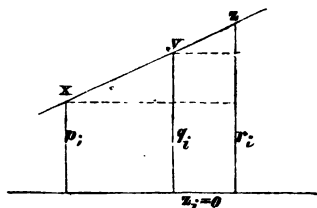
$$\lambda = k \frac{xz}{yz},$$

worin  $k$  eine ganz willkürliche Grösse bedeutet, die aber denselben Werth behalten darf, wenn  $x$  und  $y$  fest bleiben.

Beweis. Auf die Seite  $z_i = 0$  des Fundamentaldreieckes fälle man aus den Punkten  $x, y, z$  Perpendikel und nenne dieselben resp.  $p_i, q_i, r_i$ , so ist (Fig. 2)

$$\frac{xz}{r_i - p_i} = \frac{yz}{r_i - q_i}$$

Fig. 2.



oder

$$(r_i - q_i) \frac{xz}{yz} = r_i - p_i,$$

und wenn man der Kürze wegen

$$\frac{xz}{yz} = \mu \text{ setzt,}$$

$$(1 - \mu) r_i = p_i - \mu q_i.$$

Drückt man nun nach (1) in [14] die Perpendikel durch die Coordinaten aus, indem man die bei den Punkten  $x, y, z$  auftretenden Proportionalitätsfactoren resp. durch  $\varrho, \varrho', \varrho''$  bezeichnet, so ist

$$p_i = \varrho A_i x_i, \quad q_i = \varrho' A_i y_i, \quad r_i = \varrho'' A_i z_i,$$

und man erhält

$$(1 - \mu) \varrho'' A_i z_i = \varrho A_i x_i - \mu \varrho' A_i y_i$$

oder

$$\frac{(1 - \mu) \varrho''}{\varrho} z_i = x_i - \mu \frac{\varrho'}{\varrho} y_i$$

und daher

$$z_1 : z_2 : z_3 = x_1 - \mu \frac{\varrho'}{\varrho} y_1 : x_2 - \mu \frac{\varrho'}{\varrho} y_2 : x_3 - \mu \frac{\varrho'}{\varrho} y_3.$$

Es stellt sich mithin wiederum die schon in [18] ermittelte Form für die Coordinaten eines auf der Geraden  $xy$  liegenden Punctes  $z$  ein. Ausserdem aber ergibt sich, dass man hat

$$\lambda = - \frac{\varrho'}{\varrho} \mu = - \frac{\varrho'}{\varrho} \cdot \frac{xz}{yz},$$

und darin ist zwar  $-\frac{\varrho'}{\varrho} = k$  eine willkürliche Grösse, die aber von der Lage des Puncts  $z$  ganz unabhängig ist, und welcher daher stets derselbe Werth beigelegt werden kann, so lange die Puncte  $x$  und  $y$  fest bleiben.

**Zusatz.** Da sich für jeden Punct  $z$  auf der Geraden  $xy$  der Werth des Schnittverhältnisses  $xz : yz$  angeben lässt, so folgt aus dem Vorigen, dass die Coordinaten jedes Punctes auf dieser Geraden in der Form  $z_i = x_i + \lambda y_i$  geschrieben werden können.

## §. 2.

20. Bezeichnen  $a_i$  und  $b_i$  die Coordinaten zweier Punkte  $a$  und  $b$ ,  $c_i$  und  $d_i$  die Coordinaten zweier anderen Punkte  $c$  und  $d$ , welche beide auf der Geraden  $ab$  liegen, so ist

$$c_i = a_i + \lambda b_i, \quad d_i = a_i + \lambda' b_i.$$

Nach [19] ist dann

$$\lambda = k \frac{ac}{bc}, \quad \lambda' = k \frac{ad}{bd},$$

daraus folgt .

$$\lambda : \lambda' = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}.$$

Dieses Verhältniss heisst ein Doppelverhältniss (Doppelschnittverhältniss, (*ratio bissectionalis*) (*Möbius*. Der barycentrische Calcul. Leipzig 1827. pag. 244) der vier Punkte  $a, b, c, d$  und wird bezeichnet durch

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = (a b c d).$$

Bei dieser Bezeichnung ist die Ordnung, in welcher die Buchstaben auf einander folgen, von wesentlichem Belange, weil das Doppelverhältniss bei einer anderen Combination der Buchstaben einen anderen Werth erhalten kann. In Beziehung hierauf gelten folgende Sätze:

21. Ein Doppelverhältniss von vier Punkten bleibt ungeändert, wenn man die beiden ersten Elemente mit den beiden letzten vertauscht, ohne die Ordnung jedes Paares zu ändern, d. h.

$$(a b c d) = (c d a b).$$

Denn man hat nach [20]

$$(c d a b) = \frac{ca}{da} : \frac{cb}{db} = \frac{ac}{ad} : \frac{bc}{bd} = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = (a b c d).$$

22. Vertauscht man in einem Doppelverhältnisse die beiden ersten Elemente mit einander, oder die beiden letzten, so nimmt dasselbe den reciproken Werth an, d. h. es ist

$$(b a c d) = \frac{1}{(a b c d)}, \quad (a b d c) = \frac{1}{(a b c d)}.$$

2\*

Beweis. Es ist nach [20]

$$(b a c d) = \frac{bc}{ac} : \frac{bd}{ad} = \frac{1}{\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}} = \frac{1}{(a b c d)}.$$

Da man nach [21] die beiden letzten Elemente zu den beiden ersten machen kann, ohne dass das Doppelverhältniss sich ändert, so gilt die bewiesene Eigenschaft auch von den beiden letzten Elementen.

23. Vertauscht man in einem Doppelverhältniss die beiden inneren Elemente mit einander oder die beiden äusseren, so ist die Summe des neuentstehenden Doppelverhältnisses und des ursprünglichen gleich Eins, d. h.

$$(a c b d) + (a b c d) = 1,$$

$$(d b c a) + (a b c d) = 1$$

Beweis. Aus den beiden Identitäten

$$ab + bc = ac \quad ad = ab + bd$$

folgt durch Multiplication

$$ab \cdot ad + bc \cdot ad = ac \cdot ab + ac \cdot bd,$$

und hieraus durch Umstellung

$$ab(ad - ac) + bc \cdot ad - ac \cdot bd = 0$$

oder

$$ab \cdot cd + bc \cdot ad + ca \cdot bd = 0.$$

Dividirt man nun mit  $bc \cdot ad$ , so folgt

$$\frac{ab \cdot cd}{bc \cdot ad} + 1 + \frac{ca \cdot bd}{bc \cdot ad} = 0,$$

also

$$1 = \frac{ab \cdot cd}{cb \cdot ad} + \frac{ac \cdot bd}{bc \cdot ad} = \frac{ab}{cb} : \frac{ad}{cd} + \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd}$$

d. h.

$$(acbd) + (abcd) = 1.$$

Macht man wieder die beiden letzten Elemente zu den beiden ersten [21], so folgt dieselbe Eigenschaft auch für die Vertauschung der beiden äusseren Elemente.

24. Unter den 24 Doppelverhältnissen, welche sich aus den Abschnitten zwischen vier Puncten bilden lassen, sind je vier einander gleich, z. B.

$$(abcd) = (badc) = (cdab) = (dcba);$$

denn man kann zuerst den Satz [22] gleichzeitig auf die beiden ersten und auf die beiden letzten Elemente, und dann auf die ursprüngliche und auf die neue Form den Satz [21] anwenden. (Wendet man auf eine dieser vier Formen den Satz [23] gleichzeitig für die inneren und die äusseren Elemente an, so erhält man keine neue Form.)

Daher giebt es unter den 24 Doppelverhältnissen nur sechs von einander verschiedene; von diesen sind nach [22] drei die reciproken Werthe der drei übrigen, und nach [23] ergänzt sich jedesmal eines mit einem der übrigen zu Eins. Wählt man nun unter den sechs verschiedenen Werthen der Doppelverhältnisse drei solche aus, dass unter diesen keine zwei einander reciprok sind, und auch keine zwei sich zu Eins ergänzen, so heissen diese drei fundamentale Doppelverhältnisse (*Cremona* art. 1). Die drei übrigen sind dann die reciproken Werthe der vorigen und bilden ebenfalls drei fundamentale Doppelverhältnisse. Setzt man z. B.  $(abcd) = \mu$ , so folgt aus [22] und [23]

$$(abdc) = \frac{1}{\mu} \quad \text{und dann} \quad (adbc) = 1 - \frac{1}{\mu} = \frac{\mu - 1}{\mu}$$

$$(acbd) = 1 - \mu \quad \text{und dann} \quad (acdb) = \frac{1}{1 - \mu}.$$

Demnach sind

$$(abcd) = \mu, \quad (acdb) = \frac{1}{1 - \mu}, \quad (adbc) = \frac{\mu - 1}{\mu}$$

drei fundamentale Doppelverhältnisse, und

$$(abdc) = \frac{1}{\mu}, \quad (acbd) = 1 - \mu, \quad (adcb) = \frac{\mu}{\mu - 1}$$

ebenfalls.

25. Wenn das Doppelverhältniss  $(abcd)$  den Werth  $-1$  hat, so sind die Punkte  $a, b, c, d$  vier harmonische Punkte, und zwar sind die Elemente von jedem der beiden Paare  $ab$  und  $cd$  einander in Beziehung auf das andere Paar zugeordnet. Wenn daher zwei Punkte die Coordinaten

$$x_i + \lambda y_i \quad \text{und} \quad x_i - \lambda y_i$$

haben, so sind sie einander in Beziehung auf die Punkte  $x$  und  $y$  harmonisch zugeordnet, denn das Doppelverhältniss ist dann nach [20] gleich  $-1$ . Und umgekehrt.



26. Wenn von drei fundamentalen Doppelverhältnissen zwei einander gleich sind, so hat auch das dritte denselben Werth, welcher dann gleich einer imaginären Cubikwurzel aus  $-1$  ist. Die drei anderen fundamentalen Doppelverhältnisse sind dann ebenfalls einander gleich, und gleich der zweiten imaginären Cubikwurzel aus  $-1$ . Vier Punkte, deren Doppelverhältnisse diese Eigenschaft besitzen, heissen *aequianharmonische Punkte* (*Cremona* art. 27.)

Beweis. Wenn von den drei fundamentalen Doppelverhältnissen [24]

$$(a\ b\ c\ d) = \mu, \quad (a\ c\ d\ b) = \frac{1}{1-\mu}, \quad (a\ d\ b\ c) = \frac{\mu-1}{\mu}$$

die beiden ersten einander gleich sind, also  $\mu = \frac{1}{1-\mu}$ , so ist  $\mu$  eine Wurzel der Gleichung  $\mu^2 - \mu + 1 = 0$ , aus welcher  $\frac{\mu-1}{\mu} = \mu$  folgt, sodass auch das dritte Doppelverhältniss den Werth  $\mu$  hat. Nun ist aber

$$\mu^2 - \mu + 1 = \frac{\mu^3 + 1}{\mu + 1},$$

nithin  $\mu$  eine der beiden imaginären Wurzeln der Gleichung  $\mu^3 = -1$ , und da das Product dieser beiden Wurzeln gleich  $+1$  ist, so ist der reciproke Werth von  $\mu$  die andere imaginäre Cubikwurzel aus  $-1$ .

27. Bedeuten  $x_1\ x_2\ x_3\ x_4$  die Abstände von vier Punkten 1 2 3 4 einer Geraden von einem festen Punkte 0 derselben, und sind diese vier Grössen die Wurzeln einer Gleichung vierten Grades von der Form

$$(1) \quad ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0,$$

so ist die Bedingung, dass jene vier Punkte bei irgend einer Zuordnung harmonisch sind, die folgende:

$$ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3 = 0.$$

Beweis. Wenn vier Punkte bei irgend einer Zuordnung harmonisch sind, ihr Doppelverhältniss bei dieser Zuordnung also gleich  $-1$  ist, so ist der reciproke Werth desselben ebenfalls gleich  $-1$ . Daher haben die 24 Doppelverhältnisse nach [24] nur drei von einander verschiedene Werthe, und diese gehören den drei fundamentalen Doppelverhältnissen

$$(2) \quad (1\ 2\ 3\ 4), \quad (1\ 3\ 4\ 2), \quad (1\ 4\ 2\ 3)$$

an. Hat eines derselben den Werth  $-1$ , so haben die beiden anderen resp. die Werthe  $\frac{1}{2}$  und  $2$ , und alle übrigen Doppelverhältnisse erhalten einen dieser drei Werthe. Demnach sind diese drei Anordnungen die einzig möglichen, in denen die vier Punkte auf verschiedene Art einander paarweise harmonisch zugeordnet sein können. Betrachten wir die erste Anordnung, so ist

$$(1\ 2\ 3\ 4) = -1 \quad \text{oder} \quad \frac{13}{23} : \frac{14}{24} = -1$$

und daher

$$13 \cdot 24 + 14 \cdot 23 = 0.$$

Beachtet man nun, dass  $x\lambda = x_\lambda - x_x$  ist, so schreibt sich diese Gleichung

$$(x_3 - x_1)(x_4 - x_2) + (x_4 - x_1)(x_3 - x_2) = 0$$

oder entwickelt

$$2x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 - x_2x_3 - x_2x_4 + 2x_3x_4 = 0.$$

Addirt man zu derselben die aus (1) folgende Gleichung

$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = \frac{6c}{a},$$

so erhält man nach Unterdrückung des gemeinschaftlichen Factors 3

$$x_1x_2 + x_3x_4 - \frac{2c}{a} = 0.$$

Diese Gleichung findet bei der Anordnung (1 2 3 4) statt. Da nun der Ausdruck für  $\frac{6c}{a}$  in den Wurzeln symmetrisch ist, so erhält man für die beiden anderen Anordnungen (1 3 4 2), (1 4 2 3) durch entsprechende Vertauschung der Indices

$$x_1x_3 + x_4x_2 - \frac{2c}{a} = 0$$

$$x_1x_4 + x_2x_3 - \frac{2c}{a} = 0.$$

Von diesen drei Gleichungen kann immer nur eine Statt finden, weil von den drei Doppelverhältnissen (2) immer nur eines den Werth  $-1$  haben kann. Man erhält daher die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die vier

Puncte 1 2 3 4 in irgend einer Anordnung harmonisch sind, ausgedrückt durch die Gleichung

$$\left(x_1 x_2 + x_3 x_4 - \frac{2c}{a}\right) \left(x_1 x_3 + x_2 x_4 - \frac{2c}{a}\right) \left(x_1 x_4 + x_2 x_3 - \frac{2c}{a}\right) = 0.$$

In dieser ist der linke Theil symmetrisch in den Wurzeln, und lässt sich daher durch die Coefficienten der Gleichung (1) rational ausdrücken, wenn man die Gleichungen

$$\Sigma x_i = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -\frac{4b}{a}$$

$$\Sigma x_1 x_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4 = \frac{6c}{a}$$

$$\Sigma x_1 x_2 x_3 = x_1 x_2 x_3 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_2 x_3 x_4 = -\frac{4d}{a}$$

$$x_1 x_2 x_3 x_4 = \frac{e}{a}$$

berücksichtigt. Die Entwicklung giebt zunächst

$$\begin{aligned} & (x_1 x_2 + x_3 x_4) (x_1 x_3 + x_2 x_4) (x_1 x_4 + x_2 x_3) \\ & - \frac{2c}{a} [(x_1 x_2 + x_3 x_4) (x_1 x_3 + x_2 x_4) + (x_1 x_2 + x_3 x_4) (x_1 x_4 + x_2 x_3) \\ & \quad + (x_1 x_3 + x_2 x_4) (x_1 x_4 + x_2 x_3)] \\ & + \frac{4c^2}{a^2} (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_1 x_4 + x_2 x_3 + x_2 x_4 + x_3 x_4) - \frac{8c^3}{a^3} = 0, \end{aligned}$$

wofür wir abgekürzt schreiben

$$(3) \quad P - \frac{2c}{a} Q + \frac{4c^2}{a^2} \cdot \frac{6c}{a} - \frac{8c^3}{a^3} = 0.$$

Nun ergiebt sich

$$P = \Sigma x_1^3 x_2 x_3 x_4 + \Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2,$$

und es ist

$$\begin{aligned} \Sigma x_1^3 x_2 x_3 x_4 &= x_1 x_2 x_3 x_4 (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2) \\ &= \frac{e}{a} \left( \frac{16b^2}{a^2} - 2 \cdot \frac{6c}{a} \right) = \frac{16eb^2}{a^3} - \frac{12ce}{a^2} \\ \Sigma x_1^2 x_2^2 x_3^2 &= \frac{16d^2}{a^2} - 2x_1 x_2 x_3 x_4 \Sigma x_1 x_2 \\ &= \frac{16d^2}{a^2} - 2 \frac{e}{a} \cdot \frac{6c}{a} = \frac{16d^2}{a^2} - \frac{12ce}{a^2} \end{aligned}$$

also

$$P = 16 \frac{b^2 e}{a^3} - 24 \frac{ce}{a^2} + 16 \frac{d^2}{a^2}.$$

Ferner

$$\begin{aligned} Q &= \Sigma x_1^2 x_2 x_3 = x_1 x_2 x_3 (x_1 + x_2 + x_3) + x_1 x_2 x_4 (x_1 + x_2 + x_4) \\ &\quad + x_1 x_3 x_4 (x_1 + x_3 + x_4) + x_2 x_3 x_4 (x_2 + x_3 + x_4) \\ &= - \left[ x_1 x_2 x_3 \left( \frac{4b}{a} + x_4 \right) + x_1 x_2 x_4 \left( \frac{4b}{a} + x_3 \right) \right. \\ &\quad \left. + x_1 x_3 x_4 \left( \frac{4b}{a} + x_2 \right) + x_2 x_3 x_4 \left( \frac{4b}{a} + x_1 \right) \right] \\ &= - \left[ -\frac{4b}{a} \cdot \frac{4d}{a} + \frac{4e}{a} \right] = \frac{16bd}{a^2} - \frac{4e}{a}. \end{aligned}$$

Nach Substitution der Ausdrücke für  $P$  und  $Q$  in (3) erhält man daher

$$\frac{16 \cdot b^2 e}{a^3} - 24 \frac{e c}{a^2} + 16 \frac{d^2}{a^2} - \frac{2c}{a} \left( 16 \frac{bd}{a^2} - \frac{4e}{a} \right) + 16 \frac{c^3}{a^3} = 0$$

und dann nach Multiplication mit  $a^3$  und gehöriger Reduction

$$b^2 e - a e c + a d^2 - 2 b c d + c^3 = 0,$$

welches mit umgekehrtem Zeichen die obige Bedingung ist. (*Cremona* art. 6. *Salmon*. *Lessons introductory to the modern higher algebra*. pag. 100.)

28. Die nothwendige und hinreichende Bedingung, welche zwischen den Coefficienten der Gleichung (1) in [27] stattfindet, wenn die Wurzeln der letzteren vier aequianharmonischen Puncten angehören, ist

$$ae - 4bd + 3c^2 = 0.$$

Beweis. Nach [26] sind die vier Puncte 1234 aequianharmonisch, wenn

$$(1\ 2\ 3\ 4) = (1\ 3\ 4\ 2)$$

d. h.

$$\frac{13}{23} : \frac{14}{24} = \frac{14}{34} : \frac{12}{32}$$

ist. Durch die Wurzeln ausgedrückt erhält man hieraus

$$\frac{(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)}{(x_3 - x_2)(x_4 - x_1)} - \frac{(x_4 - x_1)(x_2 - x_3)}{(x_4 - x_3)(x_2 - x_1)} = 0$$

oder

$$(x_3 - x_1)(x_4 - x_2)(x_4 - x_3)(x_2 - x_1) + (x_2 - x_3)^2(x_4 - x_1)^2 = 0.$$

Diese Gleichung erweist sich als symmetrisch in Beziehung auf die Wurzeln, denn sie giebt entwickelt

$$(1) \quad - \Sigma x_1^2 x_2 x_3 + \Sigma x_1^2 x_2^2 + 6 \cdot x_1 x_2 x_3 x_4 = 0.$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\Sigma x_1^2 x_2 x_3 &= (\Sigma x_1 x_2 x_3)(\Sigma x_1) - 4x_1 x_2 x_3 x_4 = 16 \frac{b d}{a^2} - 4 \frac{e}{a} \\ \Sigma x_1^2 x_2^2 &= (\Sigma x_1 x_2)^2 - 2[\Sigma x_1^2 x_2 x_3 + 3x_1 x_2 x_3 x_4] \\ &= (\Sigma x_1 x_2)^2 - 2(\Sigma x_1 x_2 x_3)(\Sigma x_1) + 2x_1 x_2 x_3 x_4 \\ &= 36 \frac{c^2}{a^2} - 32 \frac{b d}{a^2} + 2 \frac{e}{a}.\end{aligned}$$

Substituirt man diese Werthe in (1), so erhält man

$$-16 \frac{b d}{a^2} + 4 \frac{e}{a} + 36 \frac{c^2}{a^2} - 32 \frac{b d}{a^2} + 2 \frac{e}{a} + 6 \frac{e}{a} = 0,$$

oder reducirt

$$a e - 4 b d + 3 c^2 = 0.$$

(*Painvin*. Equation des rapports anharmoniques (Nouv. Ann. de Math. Bd. 19. pag. 412.) *Cremona* art. 27.)

### §. 3.

**29.** Alle Punkte einer Geraden bilden eine Punctreihe; die Gerade selbst heisst der Träger der Punctreihe. Sind  $x, y$  zwei Punkte derselben, so können die Coordinaten aller Punkte der Reihe nach [19] durch  $x_i + \lambda y_i$  ausgedrückt werden, wenn man dem  $\lambda$  nach und nach alle Werthe zuertheilt.

**30.** Sind  $x_i + \lambda_1 y_i, x_i + \lambda_2 y_i, x_i + \lambda_3 y_i, x_i + \lambda_4 y_i$  die Coordinaten von irgend vier Punkten  $a, b, c, d$  einer Reihe, so ist das Doppelverhältniss

$$(a b c d) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

**Beweis.** Legt man die Punkte  $a, b$  als die den Träger bestimmenden zu Grunde, so können die Coordinaten jedes Punktes der Reihe in der Form

$$x_i + \lambda_1 y_i + \mu(x_i + \lambda_2 y_i)$$

geschrieben werden; diese lässt sich umformen in

$$(1 + \mu) \left( x_i + \frac{\lambda_1 + \mu \lambda_2}{1 + \mu} y_i \right),$$

und da es nur auf die Verhältnisse der Coordinaten ankommt, so kann der gemeinschaftliche Factor  $(1 + \mu)$  unberücksichtigt bleiben. Man erhält daher den Punkt  $c$ , wenn man setzt

$$(1) \quad \frac{\lambda_1 + \mu \lambda_2}{1 + \mu} = \lambda_3.$$

Ebenso kann man die Coordinaten des Punctes  $d$  in der Form

$$x_i + \lambda_1 y_i + \mu'(x_i + \lambda_2 y_i)$$

schreiben und erhält diesen Punct, wenn

$$(2) \quad \frac{\lambda_1 + \mu' \lambda_2}{1 + \mu'} = \lambda_4$$

ist. Nun ist nach [20] das Doppelverhältniss  $(a b c d)$  gleich  $\mu : \mu'$ , aber aus (1) und (2) ergibt sich

$$\mu = -\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3}, \quad \mu' = -\frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}$$

und hieraus

$$\frac{\mu}{\mu'} = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}.$$

**31.** Sind die vorigen Puncte vier harmonische Puncte, und zwar  $a b$  und  $c d$  einander resp. zugeordnet, so ist

$$\lambda_1 \lambda_2 - \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_3 + \lambda_4) + \lambda_3 \lambda_4 = 0.$$

Denn in diesem Falle ist [25]

$$\frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4} = -1,$$

was entwickelt die obige Gleichung giebt. (*Hesse*. Vorles. aus der anal. Geom. der geraden Linie etc. pag. 53.)

**32.** Bezeichnet man nach [29] mit  $x_i + \lambda y_i$  die Coordinaten der Puncte einer Punctreihe auf dem Träger  $xy$  und mit  $x'_i + \lambda y'_i$  die Coordinaten der Puncte einer zweiten Punctreihe auf dem Träger  $x'y'$ , so sollen je zwei solche Puncte der beiden Reihen, welche gleichen Werthe von  $\lambda$  angehören, einander projectivisch entsprechend, und überhaupt die beiden Punctreihen in Ansehung der einander so entsprechenden Puncte projectivisch genannt werden.

**33.** Bei zwei projectivischen Punctreihen ist das Doppelverhältniss von vier Puncten  $a, b, c, d$  der einen Reihe gleich dem Doppelverhältniss der vier entsprechenden Puncte  $a', b', c', d'$  der anderen Reihe.

**Beweis.** Das Doppelverhältniss der Puncte  $a, b, c, d$  hängt [30] nur von den Werthen von  $\lambda$  ab, welche diesen vier Puncten angehören. Den vier entsprechenden Puncten

$a', b', c', d'$  gehören aber [32] die gleichen Werthe von  $\lambda$  an, daher haben diese letzteren Punkte das nämliche Doppelverhältniss, wie die ersteren.

34. Wenn das Doppelverhältniss  $(abcd)$  von vier Punkten einer Geraden dem Doppelverhältniss  $(a'b'c'd')$  von vier ebenfalls in gerader Linie liegenden Punkten gleich ist, so entsprechen die Punkte einander der Reihe nach projectivisch.

Beweis. Seien

$$x_i, y_i, x_i + \lambda y_i, x_i + \mu y_i$$

die Coordinaten der Punkte  $a, b, c, d$ ,

$$x'_i, y'_i, x'_i + \lambda' y'_i, x'_i + \mu' y'_i$$

die der Punkte  $a', b', c', d'$ , so ist [20] der Voraussetzung nach

$$\frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{\lambda}{\mu}$$

oder mit Anwendung eines Proportionalitätsfactors  $\varrho$

$$\lambda' = \varrho \lambda \quad \mu' = \varrho \mu;$$

daher kann man die Coordinaten der Punkte  $a', b', c', d'$  auch schreiben

$$x'_i, y'_i, x'_i + \varrho \lambda y'_i, x'_i + \varrho \mu y'_i$$

oder

$$x'_i, y'_i, \varrho \left( \frac{x'_i}{\varrho} + \lambda y'_i \right); \quad \varrho \left( \frac{x'_i}{\varrho} + \mu y'_i \right),$$

Nun kommen aber lediglich die Verhältnisse der Coordinaten in Betracht, daher kann man statt der vorigen auch setzen

$$\frac{x'_i}{\varrho}, y'_i, \frac{x'_i}{\varrho} + \lambda y'_i, \frac{x'_i}{\varrho} + \mu y'_i,$$

mithin entsprechen diese vier Punkte den Punkten  $a b c d$  der Reihe nach projectivisch [32].

35. Zwei projectivische Punctreihen sind vollständig bestimmt, sobald drei Paare entsprechender Punkte  $aa', bb', cc'$  gegeben oder willkürlich angenommen sind. — Denn in Folge der Gleichheit der Doppelverhältnisse

$$(a b c d) = (a' b' c' d')$$

ist zu jedem Punkte  $d$  der entsprechende  $d'$  eindeutig bestimmt.

**36.** Diejenigen zwei Punkte  $r$  und  $q'$  zweier projectivischer Punktreihen, von denen jeder dem unendlich fernen Punkte der anderen Reihe entspricht, heissen die Gegenpunkte der beiden Reihen.

Das Product der Abstände je zweier entsprechender Punkte  $a, a'$  von ihren Gegenpunkten ist constant d. h.

$$ar \cdot a'q' = \text{Const.}$$

Beweis. Sind  $a, b, c, d$  irgend vier Punkte der einen Reihe,  $a', b', c', d'$  die ihnen entsprechenden der zweiten Reihe, so ist [33]

$$(a b c d) = (a' b' c' d')$$

oder [20]

$$\frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd} = \frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'd'}{b'd'}$$

Setzt man nun

$$c = r \quad d = \infty$$

und daher

$$c' = \infty \quad d' = q',$$

so haben die Verhältnisse  $\frac{ad}{bd}$  und  $\frac{a'c'}{b'c'}$  beide den Grenzwert Eins, und daher ist

$$\frac{ar}{br} : 1 = 1 : \frac{a'q'}{b'q'},$$

also

$$ar \cdot a'q' = br \cdot b'q';$$

daher bleibt der Werth dieses Products ungeändert, wenn an Stelle von  $a a'$  ein anderes Paar  $b b'$  entsprechender Punkte tritt.

**37.** Entsprechen die Punkte zweier Reihen einander der Art, dass das Product ihrer Abstände von zwei festen Punkten  $r$  und  $q'$  constant ist, so sind die Punktreihen projectivisch, und  $r, q'$  sind die Gegenpunkte der beiden Reihen.

Beweis. Bezeichnet man mit  $\alpha$  die Constante, und sind  $aa', bb', cc', dd'$  vier Paare entsprechender Punkte, so ist der Annahme nach

$$ar \cdot a'q' = br \cdot b'q' = cr \cdot c'q' = dr \cdot d'q' = \alpha,$$

mithin

$$a'q' = \frac{\alpha}{ar}, \quad b'q' = \frac{\alpha}{br}, \quad c'q' = \frac{\alpha}{cr}, \quad d'q' = \frac{\alpha}{dr}.$$



Da nun  $a'q' - c'q' = a'c'$ , etc. ist, so folgt

$$a'c' = \frac{\alpha(cr - ar)}{ar \cdot cr} = - \frac{\alpha \cdot ac}{ar \cdot cr}, \quad b'c' = - \frac{\alpha \cdot bc}{br \cdot cr}$$

$$a'd' = - \frac{\alpha \cdot ad}{ar \cdot dr}, \quad b'd' = - \frac{\alpha \cdot bd}{br \cdot dr},$$

und daher

$$\frac{a'c'}{b'c'} : \frac{a'd'}{b'd'} = \frac{ac}{bc} : \frac{ad}{bd};$$

das Entsprechen der Punkte ist also nach [34] ein projectivisches. Lässt man in der Gleichung  $ar \cdot a'q' = \alpha$  den Punkt  $a$  mit  $r$  zusammenfallen, so wird die Distanz  $ar$  gleich Null, folglich muss  $a'$  in's Unendliche rücken, d. h.  $r$  ist der Gegenpunct der einen Reihe, und ebenso  $q'$  der der anderen Reihe. (Cremona art. 8.)

38. Wenn zwei projectivische Punktreihen auf der nämlichen Geraden liegen, (aufeinanderliegende projectivische Punktreihen sind) so giebt es stets zwei und nur zwei (reelle oder imaginäre) Punkte, die mit ihren entsprechenden zusammenfallen und Doppelpunkte genannt werden. Die Mitte derselben ist stets reell und fällt mit der Mitte der Gegenpunkte zusammen.

Beweis. Sind  $aa'$  zwei entsprechende,  $r, q'$  die Gegenpunkte, und bedeutet  $\alpha$  eine Constante, so ist [36]

$$ar \cdot a'q' = \alpha.$$

Nimmt man nun auf dem gemeinschaftlichen Träger irgend einen festen Punkt  $o$  als Anfangspunct von Strecken an, und bezeichnet die in  $o$  beginnenden und in den Punkten  $a, r$ , etc. endenden Strecke  $oa, or$ , etc. mit den Buchstaben  $a, r$ , etc., so kann man die vorige Gleichung schreiben

$$(r - a)(q' - a') = \alpha.$$

Bedeutet nun  $x$  einen Punkt, der mit dem ihm entsprechenden zusammenfällt, so muss die Strecke  $x$  der Gleichung

$$(r - x)(q' - x) = \alpha$$

genügen. Diese, welche sich auch schreiben lässt,

$$(1) \quad x^2 - (r + q')x + rq' - \alpha = 0,$$

hat stets zwei reelle oder imaginäre Wurzeln, welche die Doppelpunkte liefern. Nennt man diese Wurzeln  $e$  und  $f$ , so folgt ferner

$$\frac{e+f}{2} = \frac{r+q'}{2}$$

d. h. die Mitte der Doppelpuncte ist immer reell und fällt mit der Mitte der Gegenpuncte zusammen. Wenn die Wurzeln der Gleichung (1) imaginär ausfallen, so sind zwar die Doppelpuncte auf dem Träger der Punctreihen nicht mehr angebbar; da sich aber für die von ihnen begrenzten Strecken auch in diesem Falle vollkommen bestimmte, wenn auch imaginäre, algebraische Ausdrücke ergeben, so betrachtet man die Doppelpuncte dann auch als vorhanden und nennt sie imaginär\*).

39. Bei zwei aufeinander liegenden projectivischen Punctreihen hat das von irgend zwei entsprechenden Puncten mit den beiden Doppelpuncten gebildete Doppelverhältniss einen constanten Werth.

Beweis. Sind  $e, f$  die Doppelpuncte,  $aa', bb'$  zwei Paare entsprechender Puncte, so ist, da jeder Doppelpunct sich selbst entspricht, nach [33]

$$(a b e f) = (a' b' e f)$$

oder [20]

$$\frac{ae}{be} : \frac{af}{bf} = \frac{a'e}{b'e} : \frac{a'f}{b'f}$$

Hieraus aber folgt

$$\frac{ae}{a'e} : \frac{af}{a'f} = \frac{be}{b'e} : \frac{bf}{b'f}$$

oder [20]

$$(a a' e f) = (b b' e f);$$

d. h. das Doppelverhältniss ändert seinen Werth nicht, wenn an Stelle von  $aa'$  ein anderes Paar entsprechender Puncte  $bb'$  tritt.

---

\*) Man kann die imaginären Doppelpuncte zweier auf einander liegender projectivischer Punctreihen stets reell angeben, wenn man die Punctreihen als einen speciellen Fall zweier kreisverwandter Punctsysteme betrachtet. Allerdings liegen die Doppelpuncte dann nicht auf dem Träger der Punctreihen und erscheinen, wenn man sie da sucht, wo sie nicht liegen, als imaginär.

## §. 4.

40. Wenn bei zwei auf einander liegenden projectivischen Punktreihen das constante Doppelverhältniss zwischen zwei entsprechenden Punkten und den beiden Doppelpunkten den Werth  $-1$  hat, d. h. [25] wenn irgend zwei entsprechende Punkte, und daher [39] alle entsprechenden Punktepaare die Strecke zwischen den Doppelpunkten harmonisch theilen, so heissen die beiden Punktreihen eine (quadratische) Involution, und die entsprechenden Punkte heissen conjugirte Punkte der Involution.

41. Wenn bei zwei aufeinander liegenden projectivischen Punktreihen ein Punkt  $a$  der ersten Reihe einem Punkte  $a'$  der zweiten Reihe, und gleichzeitig dem Punkte  $a'$  der ersten Reihe der Punkt  $a$  der zweiten Reihe entspricht, so heisst das gegenseitige Entsprechen der beiden Punkte  $a, a'$  ein involutorisches.

Bei einer Involution von Punkten entsprechen alle conjugirten Punkte einander involutorisch.

Beweis. Sind  $a a'$  irgend zwei conjugirte Punkte,  $e, f$  die Doppelpunkte, so ist [40]

$$(a a' e f) = -1.$$

Nach [22] aber ist

$$(a a' e f) = \frac{1}{(a' a e f)}$$

und daher auch

$$(a' a e f) = -1,$$

folglich ist

$$(a a' e f) = (a' a e f)$$

d. h. [34] entspricht  $a'$  dem  $a$ , so entspricht auch  $a$  dem  $a'$ .

42. Wenn bei zwei aufeinander liegenden projectivischen Punktreihen die Punkte eines Paares einander involutorisch entsprechen, so bilden die Punktreihen eine Involution und daher [41] entsprechen sich alle Punktepaare involutorisch.

Beweis. Ist

$$(a a' e f) = (a' a e f),$$

so ist, weil [22]

$$(a' a e f) = \frac{1}{(a a' e f)}$$

ist,

$$(a a' e f)^2 = 1,$$

und da das Doppelverhältniss aus vier von einander verschiedenen Punkten niemals den Werth  $+1$  haben kann, so ist

$$(a a' e f) = -1,$$

und daher [40] bilden die Punctreihen eine Involution.

43. Durch zwei conjugirte Punctepaare  $a a'$ ,  $b b'$ , die man auf einer Geraden willkürlich annehmen kann, ist eine Involution bestimmt.

Beweis. Zwei projectivische Punctreihen sind durch drei Paare entsprechender Punkte bestimmt [35]. Nun hat man hier von der einen Punctreihe vier Punkte  $a, a', b, b'$  und von der anderen die resp. entsprechenden  $a', a, b', b$ . Die Punctreihen sind also jedenfalls bestimmt; sie sind aber auch nicht überbestimmt, denn nimmt man zuerst nur  $a, a', b$  und ihnen entsprechend  $a', a, b'$  an, so hat man ein involutorisches Paar  $a a'$ , und daher muss [42] auch das zweite  $b b'$  ein involutorisches sein, d. h. es muss auch  $b$  dem  $b'$  entsprechen.

44. Es giebt immer ein und nur ein (reelles oder imaginäres) Punctepaar  $e, f$ , welches gleichzeitig zwei auf einer Geraden gegebene Punctepaare  $a a'$  und  $b b'$  harmonisch trennt; und zwar sind  $e, f$  die Doppelpunkte der durch  $a a'$  und  $b b'$  bestimmten Involution.

Beweis. Die Doppelpunkte  $e, f$  der durch  $a a'$ ,  $b b'$  nach [43] bestimmten Involution haben die genannte Eigenschaft [40]. Bezeichnet man nun die Coordinaten der Punkte  $a, a'$ ;  $b, b'$  durch

$$x_i + \lambda y_i, \quad x_i + \lambda' y_i; \quad x_i + \mu y_i, \quad x_i + \mu' y_i$$

und die der gesuchten Punkte  $e, f$  durch

$$x_i + \nu y_i, \quad x_i + \nu' y_i,$$

so müssen, wenn das letztere Paar jedes der beiden ersteren harmonisch trennen soll, nach [31] die Gleichungen.

$$\nu \nu' - \frac{1}{2} (\nu + \nu') (\lambda + \lambda') + \lambda \lambda' = 0$$

$$\nu \nu' - \frac{1}{2} (\nu + \nu') (\mu + \mu') + \mu \mu' = 0$$

erfüllt werden. Aus diesen können  $\nu \nu'$  und  $\nu + \nu'$  eindeutig

bestimmt werden, und daher sind  $\nu$  und  $\nu'$  selbst die Wurzeln einer quadratischen Gleichung. Demnach giebt es nur ein Werthepaar für  $\nu$  und  $\nu'$ , welches den vorigen Gleichungen genügt. (Hesse. Vorl. aus der anal. Geom. der geraden Linie, etc. pag. 54.)

45. Wenn von drei Punctepaaren  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  auf einer Geraden jedes die nämlichen zwei Puncte  $e$ ,  $f$  harmonisch trennt, so sind jene drei Punctepaare conjugirte Paare einer und derselben Involution, und  $e$ ,  $f$  die Doppelpuncte der letzteren. — Denn  $e$ ,  $f$  sind nach [44] die Doppelpuncte der durch  $aa'$ ,  $bb'$  bestimmten Involution, und da  $cc'$  ebenfalls einander harmonisch zugeordnet sind in Bezug auf  $e$ ,  $f$ , so gehören sie nach [40] derselben Involution an.

46. Die nothwendige und hinreichende Bedingung, dass drei Punctepaare  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  eine Involution bilden, kann durch jede der folgenden vier Gleichungen ausgedrückt werden:

$$ab' \cdot bc' \cdot ca' = ac' \cdot ba' \cdot cb'$$

$$ab' \cdot bc \cdot c'a' = ac \cdot ba' \cdot c'b'$$

$$bc' \cdot ca \cdot a'b' = ba \cdot cb' \cdot a'c'$$

$$ca' \cdot ab \cdot b'c' = cb \cdot ac' \cdot b'a'.$$

Beweis. Wählt man unter den vorliegenden sechs Puncten zwei conjugirte und zwei nicht conjugirte aus, z. B.  $ab a' c'$ , so entsprechen diesen der Reihe nach projectivisch die folgenden  $a' b' a c$ . Es ist also

$$(1) \quad (ab a' c') = (a' b' a c)$$

d. i. [20]

$$\frac{aa'}{ba'} : \frac{ac'}{bc} = \frac{a'a}{b'a} : \frac{a'c}{b'c}$$

oder

$$\frac{aa' \cdot bc'}{ba' \cdot ac'} = \frac{a'a \cdot b'c}{b'a \cdot a'c}.$$

Hebt man darin die auf beiden Seiten vorkommende Strecke  $aa'$  fort, so ergibt sich

$$\frac{bc'}{ba' \cdot ac'} = - \frac{b'c}{b'a \cdot a'c} = \frac{cb'}{ab' \cdot ca'}$$

oder

$$(2) \quad ab' \cdot bc' \cdot ca' = ac' \cdot ba' \cdot cb',$$

welches die erste der obigen Gleichungen ist. Aus dieser

folgen die drei übrigen, wenn man nach der Reihe die Punkte der Paare  $cc'$ ,  $ba'$ ,  $bb'$  unter einander vertauscht. (*Schröter. Steiner's Vorlesungen* pag. 56.) Findet umgekehrt die Gleichung (2) statt, so folgt aus ihr rückwärts die Gleichung (1), welche zeigt, dass die Punkte des Paares  $aa'$  einander involutorisch entsprechen, sodass das nämliche nach [42] auch von den Paaren  $bb'$  und  $cc'$  gelten muss.

### §. 5.

47. Bedeutet  $x$  den Abstand eines veränderlichen Punktes einer Geraden von einem beliebigen festen Punkte derselben, und besteht die Gleichung

$$(1) \quad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n + \lambda (b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n) = 0,$$

worin die  $a$  und  $b$  gegebene,  $\lambda$  aber einen veränderlichen Zahlencoefficienten bedeutet, so entsprechen jedem Punkte  $x$  ( $n - 1$ ) andere Punkte der Geraden. Denn setzt man den einem angenommenen Punkte zugehörigen Werth von  $x$  in die Gleichung (1), so liefert diese zunächst den zugehörigen Werth von  $\lambda$  und besitzt dann  $n$  Wurzeln, von denen eine die angenommene  $x$  ist. Man kann auch sagen, dass jedem Werthe von  $\lambda$  vermöge der Gleichung (1) eine Gruppe von  $n$  Punkten zugehört, entsprechend den  $n$  Wurzeln der Gleichung (1). Das System solcher Punktgruppen, welches entsteht, wenn man  $\lambda$  andere und andere Werthe zuertheilt, heisst eine Involution  $n^{\text{ten}}$  Grades (*Cremona* art. 21. *Jonquières Généralisation de la théorie de l'involution. Annali di Matematica* II. pag. 86). Fallen in einer Gruppe zwei Punkte in einen zusammen, so heisst ein solcher Punkt ein Doppelpunkt der Involution.

48. Ist  $n = 1$ , sodass die Gleichung (1) in [47] in folgende

$$(1) \quad a_0 x + a_1 + \lambda (b_0 x + b_1) = 0$$

übergeht, so besteht jede Punktgruppe nur aus einem Punkte; eine Involution ersten Grades bildet also eine einfache Punktreihe. Hat man nun eine zweite Punktreihe, bestimmt durch die Gleichung

$$a'_0 x' + a'_1 + \lambda (b'_0 x' + b'_1) = 0,$$

so sind diejenigen Punkte beider Reihen, welche gleichen Werthen von  $\lambda$  angehören, einander projectivisch entsprechend.

Beweis. Bezeichnet man die Werthe von  $x$  (und auch die entsprechenden Punkte), welche zu  $\lambda = 0$  und  $\lambda = \infty$  gehören, resp. mit  $\xi$  und  $\eta$ , so ist

$$\xi = -\frac{a_1}{a_0} \quad \eta = -\frac{b_1}{b_0},$$

und führt man diese in die Gleichung (1) ein, so ergibt sich

$$\lambda = -\frac{a_0}{b_0} \cdot \frac{x - \xi}{x - \eta};$$

die Grösse  $\lambda$  ist also proportional dem Schnittverhältniss, welches der veränderliche Punkt  $x$  mit den festen Punkten  $\xi$  und  $\eta$  bestimmt. Bildet man nun das Doppelverhältniss von vier Punkten der einen Reihe und das von solchen vier Punkten der zweiten Reihe, welche gleichen Werthen von  $\lambda$  angehören, so haben diese beiden Doppelverhältnisse gleichen Werth und folglich [34] sind die beiden Punktreihen projectivisch.

49. Eine Involution zweiten Grades ( $n=2$ ) ist identisch mit der in [40] ff. betrachteten Involution.

Beweis. In diesem Falle besteht jede Punktgruppe aus zwei Punkten, angehörig den Wurzeln der Gleichung

$$(1) \quad a_0 x^2 + a_1 x + a_2 + \lambda(b_0 x^2 + b_1 x + b_2) = 0.$$

Nimmt man aus jeder Punktgruppe nur einen Punkt, so erhält man eine Punktreihe; und daher können die sämtlichen Gruppen als zwei auf demselben Träger befindliche Punktreihen angesehen werden, in welchen je zwei Punkte entsprechende oder conjugirte sind, die derselben Gruppe angehören. Wenn man nun zeigen kann, dass dieses Entsprechen der Punkte der beiden Reihen ein projectivisches ist, so ist es wegen ihrer Entstehung aus der quadratischen Gleichung auch immer ein involutorisches [41], und daher bilden dann die Punktreihen eine Involution im früheren Sinne [42]. Bezeichnet man, um diesen Nachweis zu liefern, die Wurzeln der Gleichung (1) mit  $x_1$  und  $x_2$ , so ist zuerst

$$(2) \quad x_1 x_2 = \frac{a_2 + \lambda b_2}{a_0 + \lambda b_0}.$$

Für diejenige Gruppe aber, welcher der Nullpunkt angehört, ist

$$a_2 + \lambda b_2 = 0 \quad \text{oder} \quad \lambda = -\frac{a_2}{b_2},$$

und der dem Nullpuncte conjugirte Punct ist dann bestimmt durch

$$x = -\frac{a_1 + \lambda b_1}{a_0 + \lambda b_0} = -\frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_0 b_2 - a_2 b_0}.$$

Wählt man jetzt den Nullpunct so, dass der ihm conjugirte Punct im Unendlichen liegt, so muss

$$a_0 b_2 - a_2 b_0 = 0,$$

oder, wenn  $\varrho$  einen willkürlichen Proportionalitätsfactor bedeutet,

$$b_2 = \varrho a_2 \quad b_0 = \varrho a_0$$

sein. Substituirt man diese Werthe in (2), so folgt

$$x_1 x_2 = \frac{a_2(1 + \lambda \varrho)}{a_0(1 + \lambda \varrho)} = \frac{a_2}{a_0},$$

d. h. das Product der Abstände zweier conjugirter Puncte von dem neuen Nullpuncte ist unabhängig von  $\lambda$  und für alle Punctepaare constant. Demnach [37] sind die in Rede stehenden Punctreihen in der That projectivisch, und der neue Nullpunct ist der gemeinschaftliche Gegenpunct beider Reihen. Dass der letztere beiden gemeinschaftlich ist, bestätigt, dass der Gegenpunct und der unendlich ferne Punct einander involutorisch entsprechen. (*Cremona. art. 25.*)

**50.** Wenn in der Gleichung (1) in [47]  $n = 3$  ist, so erhält man eine cubische Involution vermöge der Gleichung

$$(1) \quad a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 + \lambda (b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3) = 0.$$

Jede Gruppe besteht hier aus drei Puncten. In einer cubischen Involution giebt es vier Doppelpuncte, d. h. unter den Punctgruppen, welche eine cubische Involution bilden, giebt es vier, welche zwei zusammenfallende Puncte enthalten.

**Beweis.** Ein Doppelpunct entsteht dann und nur dann, wenn die Grösse  $\lambda$  einen solchen Werth hat, dass die Gleichung (1) zwei gleiche Wurzeln besitzt. Nun ist aber die Bedingung, dass eine cubische Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, nach [9] eine Gleichung, welche die Coefficienten der cubischen Gleichung in der vierten Dimension enthält. In Beziehung



auf  $\lambda$  wird daher diese Bedingung eine Gleichung vom vierten Grade. Die vier Wurzeln derselben sind die Werthe von  $\lambda$ , deren zugehörige Punctgruppen Doppelpuncte enthalten. (*Cremona*, art. 22.)

51. Ist eine cubische Involution der Art, dass von jeder Gruppe ein Punct in einen festen Punct  $o$  hineinfällt, so fallen in diesen auch zwei Doppelpuncte hinein, und es giebt ausserdem nur noch zwei andere Doppelpuncte.

Beweis. Nimmt man den Punct  $o$  als denjenigen, von welchem aus die Abstände  $x$  gerechnet werden, so muss im vorliegenden Falle die Gleichung (1) in [50] für jeden Werth von  $\lambda$  eine Wurzel  $x = 0$  haben; daher muss  $a_3 = 0$ ,  $b_3 = 0$  sein, und die Gleichung die Form haben

$$(1) \quad x[a_0 x^2 + a_1 x + a_2 + \lambda(b_0 x^2 + b_1 x + b_2)] = 0.$$

Bestimmt man nun wieder nach [9] die Bedingung, dass diese cubische Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat, so hat man in [9]  $d = 0$  zu setzen, und dadurch reducirt sich die dortige Gleichung auf

$$c^2(b^2 - 4ac) = 0.$$

Das giebt auf die vorliegende Gleichung (1) übertragen

$$(2) \quad (a_2 + \lambda b_2)^2 [(a_1 + \lambda b_1)^2 - 4(a_0 + \lambda b_0)(a_2 + \lambda b_2)] = 0.$$

Diese Gleichung hat zwei gleiche Wurzeln  $\lambda$ , für welche  $a_2 + \lambda b_2 = 0$  ist, und für welche die Gleichung (1) im linken Theile den Factor  $x^2$  erhält, so dass zwei Doppelpuncte in  $x = 0$ , d. h. in  $o$  hineinfallen.

52. Ist eine cubische Involution von der Art, dass nicht allein von jeder Gruppe ein Punct in  $o$  hineinfällt, sondern dass ausserdem eine der Gruppen aus drei in  $o$  zusammenfallenden Puncten besteht, so fallen drei Doppelpuncte in  $o$  hinein, und es existirt ausserdem nur noch ein anderer Doppelpunct.

Beweis. In diesem Falle muss es einen Werth von  $\lambda$  geben, für welchen in (1) [51] gleichzeitig

$$a_1 + \lambda b_1 = 0 \quad \text{und} \quad a_2 + \lambda b_2 = 0,$$

ist, so dass dann

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2},$$

oder wenn  $\varrho$  einen willkürlichen Proportionalitätsfactor bedeutet,

$$a_1 = \varrho a_2 \quad b_1 = \varrho b_2$$

sein muss. Dadurch reducirt sich die Gleichung (2) in [51] auf

$$(a_2 + \lambda b_2)^2 [\varrho^2 (a_2 + \lambda b_2) - 4(a_0 + \lambda b_0)] = 0,$$

welche drei gleiche Wurzeln  $\lambda$  hat, für die  $a_2 + \lambda b_2 = 0$  ist, und denen der Punct  $o$  als Doppelpunct angehört.

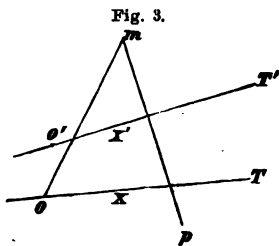
53. Gerade so wie sich in [48] ergeben hat, dass in zwei Involutionen ersten Grades, d. h. zwei Punctreihen, solche Puncte einander projectivisch entsprechen, welche gleichen Werthen von  $\lambda$  angehören, so sollen auch in zwei Involutionen beliebigen Grades, welche von den Gleichungen  $a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n + \lambda(b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \dots + b_n) = 0$   $a_0' x^m + a_1' x^{m-1} + \dots + a_m' + \lambda(b_0' x^m + b_1' x^{m-1} + \dots + b_m') = 0$  abhängen, je zwei Punctgruppen, welche gleichen Werthen von  $\lambda$  zugehören, einander projectivisch entsprechend genannt werden.

54. Legt man von einem beliebigen Mittelpuncte  $m$  aus Strahlen durch die Puncte einer Involution beliebigen Grades auf einer Geraden  $T$ , so bilden die Durchschnitte dieser Strahlen mit einer beliebigen anderen Geraden  $T'$  eine Involution desselben Grades, welche mit der vorigen projectivisch ist.

Beweis. (Fig. 3.) Man nehme  $T$  als Abscissenaxe in einem Parallelkoordinatensystem, und als Ordinatenaxe die Gerade, welche den Anfangspunct  $o$  der Strecken  $x$  mit dem Mittelpuncte  $m$  der Strahlen verbindet. Ebenso sei  $T'$  die Abscissenaxe in einem zweiten Parallel-Coordinatensystem, dessen Anfangspunct  $o'$ , und dessen Ordinatenaxe beliebig seien. Nennt man die Coordinaten irgend eines Puncts in Beziehung auf diese beiden Systeme resp.  $\xi, \eta$  und  $\xi', \eta'$ , so sind die Transformationsformeln von der Form

$$\xi = k + a\xi' + b\eta' \quad \eta = k' + a'\xi' + b'\eta'$$

worin  $a, b, a', b', k, k'$  constant sind. Setzt man  $om = c$ , so ist die Gleichung irgend eines Strahles  $mp$  in Beziehung auf das erste Coordinatensystem



$$\frac{\xi}{x} + \frac{\eta}{c} = 1$$

und daher in Beziehung auf das zweite Coordinatensystem

$$\frac{k + a\xi' + b\eta'}{x} + \frac{k' + a'\xi' + b'\eta'}{c} = 1.$$

Bezeichnet man nun mit  $x'$  die Strecke, welche der Strahl  $mp$  von der Abscissenaxe  $T'$  abschneidet; so erhält man  $\xi' = x'$ , wenn man  $\eta' = 0$  setzt, und daher zwischen den beiden auf den Geraden  $T$  und  $T'$  befindlichen und einander entsprechenden Strecken  $x$  und  $x'$  die Beziehung

$$\frac{k + ax'}{x} + \frac{k' + a'x'}{c} = 1 \quad \text{oder} \quad x = \frac{c(k + ax')}{c - k' - a'x'}.$$

Substituirt man diesen Ausdruck für  $x$  in die Gleichung (1) [47] der Involution, so erhält man für  $x'$  eine Gleichung derselben Form, also bilden die Endpunkte der Strecken  $x'$  eine Involution  $n^{\text{ten}}$  Grades, und da hiebei diejenigen Gruppen, welche von den nämlichen Strahlen getroffen werden, gleichen Werthen von  $\lambda$  angehören, so sind die beiden Involutionen projectivisch [53].

55. Hieraus folgt unmittelbar: Hat man auf einer Geraden zwei projectivische Involutionen von beliebigen Graden und schneidet einen durch die Punkte dieser Involutionen gehenden Strahlbüschel mit einer anderen Geraden, so erzeugen die Strahlen auf der letzteren zwei projectivische Involutionen von denselben Graden.

## §. 6.

56. Sind  $X_1 = 0$ ,  $X_2 = 0$  die Gleichungen zweier Geraden, so stellt die Gleichung

$$X_1 + \lambda X_2 = 0$$

für jeden Werth von  $\lambda$  eine Gerade dar, welche durch den Durchschnittspunkt  $m$  der Geraden  $X_1$  und  $X_2$  hindurchgeht. — Denn für die Coordinaten von  $m$  verschwindet gleichzeitig  $X_1$  und  $X_2$  und daher auch  $X_1 + \lambda X_2$ .

57. Bezeichnet man mit  $Y = X_1 + \lambda X_2 = 0$  eine durch  $m$  hindurchgehende Gerade, so ist die Grösse  $\lambda$  proportional

dem Verhältniss der Sinus der Winkel, welche  $F$  mit  $X_1$  und  $X_2$  einschliesst, d. h.

$$\lambda = k \frac{\sin (X_1 F)}{\sin (X_2 F)},$$

wo  $k$  eine Grösse bedeutet, welche ihren Werth unverändert beibehält, so lange die Geraden  $X_1, X_2$  fest bleiben.

**Beweis.** In Beziehung auf ein Fundamentaldreieck, welches die Geraden  $X_1$  und  $X_2$  zu Seiten hat, kann man nach [13] die Grössen  $X_1$  und  $X_2$  als homogene Coordinaten betrachten. Für einen Punkt aber, der auf  $F$  liegt, ist  $X_1 + \lambda X_2 = 0$ , also

$$\lambda = -\frac{X_1}{X_2}.$$

Bezeichnet man nun mit  $p_1$  und  $p_2$  die von diesem Punkte auf die Seiten  $X_1$  und  $X_2$  des Fundamentaldreiecks gefällten Perpendikel, so ist nach [14]

$$p_1 = \varrho A_1 X_1 \quad p_2 = \varrho A_2 X_2$$

und daher

$$\lambda = -\frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{p_1}{p_2}.$$

Die Perpendikel  $p_1, p_2$  aber verhalten sich wie die Sinus der Winkel, welche  $F$  mit  $X_1$  und  $X_2$  einschliesst, und zwar ist, wenn man die Winkel alle nach derselben Richtung hin positiv nimmt, mit Rücksicht auf [15]

$$-\frac{p_1}{p_2} = \frac{\sin (X_1 F)}{\sin (X_2 F)}$$

und daher

$$\lambda = \frac{A_2}{A_1} \cdot \frac{\sin (X_1 F)}{\sin (X_2 F)}.$$

Darin hängt der Coefficient  $\frac{A_2}{A_1} = k$  davon ab, welche Grössen speciell als homogene Coordinaten gewählt werden, und bleibt dann ungeändert, so lange  $X_1$  und  $X_2$  fest bleiben.

**Zusatz.** Aus dem Vorigen folgt, dass die Gleichung jeder durch den Durchschnitt der Geraden  $X_1 = 0, X_2 = 0$  gehenden Geraden in der Form  $X_1 + \lambda X_2 = 0$  geschrieben werden kann; und giebt man dann der Grösse  $\lambda$  andere und andere Werthe, so bilden die entstehenden Geraden einen Strahlbüschel.

58. Bezeichnet man zwei Strahlen  $X_1 = 0$  und  $X_2 = 0$  eines Strahlbüschels mit  $a$  und  $b$ , und zwei andere Strahlen  $X_1 + \lambda X_2 = 0$  und  $X_1 + \lambda' X_2 = 0$  mit  $c$  und  $d$ , so ist nach [57]

$$\lambda = k \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)}, \quad \lambda' = k \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}$$

und daher

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}.$$

Dies Verhältniss heisst ein Doppelverhältniss der vier Strahlen  $a, b, c, d$  und wird bezeichnet durch

$$(a \ b \ c \ d) = \frac{\sin(ac)}{\sin(bc)} : \frac{\sin(ad)}{\sin(bd)}.$$

59. Die Sätze [21]—[26] über Doppelverhältnisse von vier Punkten können ohne Weiteres auf Doppelverhältnisse von vier Strahlen übertragen werden und aus [25] folgt, dass

$$X_1 = 0, \ X_2 = 0, \ X_1 + \lambda X_2 = 0, \ X_1 - \lambda X_2 = 0$$

vier harmonische Strahlen darstellen, von denen die beiden ersten und die beiden letzten einander zugeordnet sind.

60. Ebenso wie in [30] beweist man, dass wenn die Gleichungen

$$X_1 + \lambda_1 X_2 = 0, \ X_1 + \lambda_2 X_2 = 0, \ X_1 + \lambda_3 X_2 = 0, \ X_1 + \lambda_4 X_2 = 0$$

vier Strahlen  $a, b, c, d$  eines Strahlbüschels darstellen, das Doppelverhältniss

$$(a \ b \ c \ d) = \frac{\lambda_1 - \lambda_3}{\lambda_2 - \lambda_3} : \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_4}$$

ist.

61. Zwei Strahlbüschel, deren Gleichungen resp.

$$X_1 + \lambda X_2 = 0, \quad X_1' + \lambda X_2' = 0$$

sind, heissen projectivisch, indem je zwei Strahlen, aus jedem der beiden Büschel einer, welche gleichen Werthen von  $\lambda$  angehören, als einander entsprechend betrachtet werden. Dadurch übertragen sich die Sätze [33]—[35] unmittelbar auf projectivische Strahlbüschel.

62. In zwei projectivischen Strahlbüscheln gibt es ein und nur ein Paar entsprechender rechter Winkel, d. h. in dem einen Strahlbüschel gibt es nur ein Paar auf einander senk-

recht stehender Strahlen, deren entsprechende in dem anderen Strahlbüschel ebenfalls auf einander senkrecht stehen.

Beweis. Seien  $s, t, a, b$  vier Strahlen des einen Büschels,  $s', t', a', b'$  die entsprechenden des andern, so ist [61], [33]

$$(s a t b) = (s' a' t' b'),$$

d. h. nach [58]

$$(1) \quad \frac{\sin(s t)}{\sin(a t)} : \frac{\sin(s b)}{\sin(a b)} = \frac{\sin(s' t')}{\sin(a' t')} : \frac{\sin(s' b')}{\sin(a' b')}.$$

Ist nun  $(s t) = 90^\circ$ , und verlangt man, dass gleichzeitig auch  $(s' t') = 90^\circ$  sei, so ist  $\sin(s t) = \sin(s' t') = 1$ , ferner  $(a t) = (a s) + (s t) = (a s) + 90^\circ$ , daher  $\sin(a t) = \cos(a s)$  und ebenso  $\sin(a' t') = \cos(a' s')$ . Damit erhält man

$$\frac{\sin(a b)}{\cos(a s) \sin(s b)} = \frac{\sin(a' b')}{\cos(a' s') \sin(s' b')}.$$

Nun ist ferner  $(s b) = (a b) - (a s)$ ;  $(s' b') = (a' b') - (a' s')$ . Substituiert man dies und kehrt die Brüche um, so kommt

$$\frac{\cos(a s) \sin((a b) - (a s))}{\sin(a b)} = \frac{\cos(a' s') \sin((a' b') - (a' s'))}{\sin(a' b')}.$$

Rechnet man nun in dem ersten Strahlbüschel alle Winkel von dem Strahle  $a$  aus, und in dem zweiten von dem Strahle  $a'$  aus, so sollen die Winkel  $(a b)$ ,  $(a s)$ ;  $(a' b')$ ,  $(a' s')$  einfach mit den Buchstaben  $b, s$ ;  $b', s'$  bezeichnet werden. Dann schreibt sich die vorige Gleichung

$$\frac{\cos s \sin(b - s)}{\sin b} = \frac{\cos s' \sin(b' - s')}{\sin b'},$$

und wenn man entwickelt und der Kürze wegen

$$\cotg b = B \quad \cotg b' = B'$$

setzt,

$$\cos^2 s - B \sin s \cos s = \cos^2 s' - B' \sin s' \cos s'.$$

Führt man hier die doppelten Winkel  $2s$  und  $2s'$  ein, so erhält man

$$\cos 2s - B \sin 2s = \cos 2s' - B' \sin 2s'.$$

Diese Beziehung muss also zwischen den Winkeln  $s$  und  $s'$  stattfinden, wenn die Strahlen  $s, s'$  entsprechende Schenkel entsprechender rechter Winkel sein sollen. Ist nun  $c, c'$  ein neues Paar entsprechender Strahlen, und setzt man wie oben  $(ac) = c$ ,  $(a'c') = c'$ , ferner

$$\cotg c = C, \quad \cotg c' = C',$$

so hat man auch

$$\cos 2s - C \sin 2s = \cos 2s' - C' \sin 2s'.$$

Eliminirt man  $s'$  aus dieser und der vorigen Gleichung, so erhält man eine Gleichung, aus welcher die Lage des Strahls  $s$  von der verlangten Beschaffenheit sich ergibt. Nun folgt

$$\begin{aligned} (B' - C') \cos 2s + (BC' - B'C) \sin 2s &= (B' - C') \cos 2s' \\ (B - C) \sin 2s &= (B' - C') \sin 2s', \end{aligned}$$

also durch Quadriren und Addiren

$$\begin{aligned} (B' - C')^2 \cos^2 2s + 2(B' - C')(BC' - B'C) \sin 2s \cos 2s \\ + [(B - C)^2 + (BC' - B'C)^2] \sin^2 2s = (B' - C')^2. \end{aligned}$$

Vereinigt man jetzt die beiden in  $(B' - C')^2$  multiplicirten Glieder, so zeigt sich, dass  $\sin 2s$  als Factor auftritt. Allein für  $s = 0$ , wird auch  $s' = 0$ , und die Gleichung (1) zeigt, dass wenn der Strahl  $s$  mit  $a$ , und gleichzeitig  $s'$  mit  $a'$  zusammenfällt, diese Gleichung identisch erfüllt ist. Daher hat der Factor  $\sin 2s$  für die vorliegende Aufgabe keine Bedeutung. Nach Unterdrückung desselben ergibt sich dann

$$\begin{aligned} 2(B' - C')(BC' - B'C) \cos 2s \\ + [(B - C)^2 + (BC' - B'C)^2] \sin 2s = (B' - C')^2 \sin 2s \end{aligned}$$

und daraus

$$\tg 2s = \frac{2(B' - C')(BC' - B'C)}{(B' - C')^2 - [(B - C)^2 + (BC' - B'C)^2]}.$$

Da sich nun  $\tg 2s$  eindeutig bestimmen lässt, so giebt es zwei auf einander senkrecht stehende Strahlen, die die Forderung erfüllen, mithin immer ein und nur ein Paar entsprechender rechter Winkel.

**63.** Bei zwei projectivischen Strahlbüscheln ist das Product aus den Tangenten derjenigen Winkel, welche irgend zwei entsprechende Strahlen  $a, a'$  mit den ungleichnamigen Schenkeln der entsprechenden rechten Winkel ( $s, t'$  oder  $s', t$ ) bilden, constant:

$$(1) \quad \tg(sa) \tg(t'a') = \text{Const.}$$

Beweis. Es ist [61], [33]  $(s t a b) = (s' t' a' b')$ , wenn  $aa', bb'$  zwei Paare entsprechender Strahlen und  $s, s'; t, t'$  die

entsprechenden Schenkel der entsprechenden rechten Winkel bedeuten, also [58]

$$\frac{\sin(sa)}{\sin(ta)} : \frac{\sin(sb)}{\sin(tb)} = \frac{\sin(s'a')}{\sin(t'a')} : \frac{\sin(s'b')}{\sin(t'b')}.$$

Nun ist aber  $(sa) = (st) + (ta) = 90^\circ + (ta)$ , also

$$\sin(sa) = \cos(ta), \quad \sin(ta) = -\cos(sa),$$

und ähnlich bei den übrigen. Man erhält demnach

$$\begin{aligned} \cotg(ta) : \cotg(tb) &= -\tg(s'a') : -\tg(s'b') \\ &= -\tg(sa) : -\tg(sb) = \cotg(t'a') : \cotg(t'b') \end{aligned}$$

und daher

$$\frac{\tg(tb)}{\tg(ta)} = \frac{\tg(s'a')}{\tg(s'b')} = \frac{\tg(t'b')}{\tg(t'a')} = \frac{\tg(sa)}{\tg(sb)},$$

mithin

$$\tg(sa) \tg(t'a') = \tg(sb) \tg(t'b'),$$

d. h. dies Product bleibt ungeändert, wenn  $bb'$  an Stelle von  $aa'$  treten. (Schröter. Steiner's Vorl. pag. 35.)

**64.** Bei zwei concentrischen projectivischen Strahlbüscheln, d. h., solchen, deren Mittelpuncte zusammenfallen, giebt es stets zwei (reelle oder imaginäre) Strahlen, von denen jeder mit seinem entsprechenden zusammenfällt, und welche Doppelstrahlen heissen.

Beweis. Bezeichnet man mit den Buchstaben  $a, s$ , etc. die Winkel, welche die gleich benannten Strahlen mit irgend einem festen Strahle bilden, und bedeutet  $\alpha$  eine Constante, so kann man die Gleichung (1) in [63] so schreiben

$$\tg(a - s) \tg(a' - t') = \alpha.$$

Wenn nun ein Strahl  $x$  mit dem ihm entsprechenden zusammenfällt, so muss der ihm angehörige Winkel  $x$  der Gleichung

$$\tg(x - s) \tg(x - t') = \alpha$$

genügen. Diese ist in Beziehung auf  $\tg x$  quadratisch und hat daher zwei reelle oder imaginäre Wurzeln. In dem letztern Falle sagt man, die beiden Strahlbüschel haben zwei imaginäre Doppelstrahlen.



## §. 7.

65. Zwei projectivische Strahlbüschel werden von zwei beliebigen Geraden in zwei projectivischen Punctreihen geschnitten.

Beweis. Nach [61] können zwei projectivische Strahlbüschel durch Gleichungen von der Form

$$X + \lambda Y = 0 \quad X' + \lambda Y' = 0$$

dargestellt werden. Darin sei

$$\begin{aligned} X &= \Sigma a_i x_i & X' &= \Sigma a'_i x_i \\ Y &= \Sigma b_i x_i & Y' &= \Sigma b'_i x_i. \end{aligned}$$

Schneidet man nun den ersten Strahlbüschel mit der Geraden  $\Sigma m_i x_i = 0$  und den zweiten mit der Geraden  $\Sigma m'_i x_i = 0$ , so erhält man die Coordinaten der ersten Punctreihe aus der Auflösung der Gleichungen

$$X + \lambda Y = (a_1 + \lambda b_1)x_1 + (a_2 + \lambda b_2)x_2 + (a_3 + \lambda b_3)x_3 = 0$$

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0.$$

Diese ergibt

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 &= [(a_2 + \lambda b_2) m_3 - (a_3 + \lambda b_3) m_2] : \text{etc.} \\ &= [a_2 m_3 - a_3 m_2 + \lambda (b_2 m_3 - b_3 m_2)] : \text{etc.} \end{aligned}$$

Ebenso erhält man für die Verhältnisse der Coordinaten der zweiten Punctreihe

$$a'_2 m'_3 - a'_3 m'_2 + \lambda (b'_2 m'_3 - b'_3 m'_2) : \text{etc.}$$

Nach [32] sind daher die beiden Punctreihen projectivisch.

66. Hieraus, und weil projectivische Punctreihen und Strahlbüschel durch drei Paar entsprechender Elemente bestimmt sind [35] [61], folgt: Legt man aus zwei beliebigen Mittelpuncten Strahlen durch die Puncte zweier projectivischer Punctreihen, so erhält man zwei projectivische Strahlbüschel.

67. In Folge der drei letzten Sätze können die von aufeinander liegenden Punctreihen und der Punctinvolution handelnden Sätze [39]—[45] unmittelbar auf concentrische Strahlbüschel und die Strahleninvolution übertragen werden; und ebenso wie in [46] beweist man, dass die nothwendige

und hinreichende Bedingung, dass drei Strahlenpaare  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  in Involution sind, durch jede der folgenden vier Gleichungen ausgedrückt werden kann:

$$\sin(ab') \sin(bc') \sin(ca') = \sin(ac') \sin(ba') \sin(cb')$$

$$\sin(ab') \sin(bc) \sin(ca') = \sin(ac) \sin(ba') \sin(cb')$$

$$\sin(bc') \sin(ca) \sin(a'b') = \sin(ba) \sin(cb') \sin(a'c')$$

$$\sin(ca') \sin(ab) \sin(b'c') = \sin(cb) \sin(ac') \sin(b'a')$$

68. Sieht man einen Strahlbüschel als zwei sich vollkommen deckende projectivische Strahlbüschel an, so folgt aus [65]: Ein Strahlbüschel wird von zwei beliebigen Geraden in zwei projectivischen Punktreihen geschnitten. In diesem Falle sagt man, die Punktreihen befinden sich in perspectivischer Lage. In dem Durchschnitte der beiden Geraden sind dann zwei entsprechende Punkte vereinigt.

69. Wenn in dem Durchschnitte  $a$  der Träger zweier projectivischer Punktreihen zwei entsprechende Punkte vereinigt sind, so liegen die Punktreihen perspectivisch d. h. [68] die Verbindungslinien entsprechender Punkte schneiden sich in einem Punkte.

Beweis. Sind  $aa'$  die beiden in dem Durchschnitte  $a$  vereinigt liegenden entsprechenden Punkte,  $bb'$ ,  $cc'$  zwei weitere Paare entsprechender Punkte, so ist [35] zu jedem Punkte  $d$  der entsprechende  $d'$  eindeutig bestimmt. Ist nun aber  $m$  der Durchschnitt der Geraden  $bb'$ ,  $cc'$ , so erhält man einen Strahlbüschel  $m(abc d \dots)$ , und dieser muss die zweite Gerade nach [68] in den entsprechenden Punkten  $a' b' c' d' \dots$  schneiden.

70. Sieht man eine Punktreihe als zwei sich deckende projectivische Punktreihen an, so folgt aus [66]: Die von zwei beliebigen Mittelpunkten  $m$  und  $m'$  nach den Punkten einer Punktreihe gehenden Strahlen bilden zwei projectivische Strahlbüschel. In diesem Falle sagt man, die Strahlbüschel befinden sich in perspectivischer Lage. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen liegen also dann in einer Geraden, welche der perspectivische Durchschnitt heisst. In der Geraden, welche die beiden Mittelpunkte verbindet, sind ferner zwei entsprechende Strahlen vereinigt.

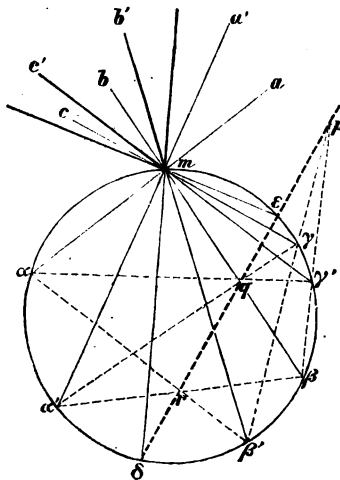
71. Wenn bei zwei projectivischen Strahlbüscheln die Verbindungslinie der Mittelpuncte  $m$  und  $m'$  zwei entsprechende Strahlen vereinigt enthält; so liegen die Strahlbüschel perspectivisch, d. h. die Schnittpuncte entsprechender Strahlen liegen in einer Geraden.

Beweis. Nimmt man zu den beiden in der Geraden  $mm'$  vereinigten Strahlen noch zwei Paare entsprechender Strahlen hinzu, so sind einerseits die beiden projectivischen Büschel bestimmt; andererseits bestimmen die Durchschnitte der letzteren beiden Strahlenpaare eine Gerade. Verbindet man die Punkte derselben mit  $m$  und  $m'$ , so erhält man die entsprechenden Strahlen der durch die obigen drei Paare bestimmten Büschel [70].

72. Aufgabe. Bei zwei concentrischen projectivischen Strahlbüscheln die Doppelstrahlen zu construiren.

Auflösung. (Fig. 4.) Man lege durch den Mittelpunct  $m$  einen beliebigen Kreis. Sind nun  $abc$  drei gegebene Strahlen des einen,  $a'b'c'$  die entsprechenden Strahlen des anderen Büschels, so schneide man mit diesen den Kreis in  $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ . Suche sodann die Durchschnitte

Fig. 4.



$$(\beta\gamma', \beta'\gamma) = p,$$

$$(\gamma\alpha', \gamma'\alpha) = q,$$

$$(\alpha\beta', \alpha'\beta) = r.$$

Diese drei Punkte liegen in einer Geraden (man braucht daher nur zwei derselben zu bestimmen), und sind dann  $\delta, \epsilon$  die Punkte, in welchen diese Gerade  $pqr$  den Kreis schneidet, so sind  $m\delta$  und  $m\epsilon$  die gesuchten Doppelstrahlen. Trifft die Gerade  $pqr$  den Kreis nicht, so sind die Doppelstrahlen imaginär.

Beweis. Betrachtet man  $\alpha$  als Mittelpunct eines Strahlbüschels  $\alpha(\alpha'\beta'\gamma')$ , so ist derselbe mit dem gegebenen Büschel  $m(a'b'c')$ , oder was dasselbe

ist, mit  $m(\alpha' \beta' \gamma')$  congruent, weil der von jedem Strahlenpaar gebildete Winkel dem von dem entsprechenden Paare gebildeten Winkel gleich ist (als Peripheriewinkel auf gleichem Bogen). Ebenso ist der Büschel  $\alpha'(\alpha \beta \gamma)$  congruent mit  $m(\alpha b c)$ . Demnach ist

$$\alpha(\alpha' \beta' \gamma') \overline{\wedge} \alpha'(\alpha \beta \gamma)^*),$$

und da die beiden entsprechenden Strahlen  $\alpha \alpha'$  und  $\alpha' \alpha$  dieselbe Gerade bilden, so [71] liegen die beiden Büschel perspectivisch, und  $qr$  ist ihr perspectivischer Durchschnitt. Ist nun  $\delta$  einer der Punkte, in welchen die Gerade  $qr$  den Kreis schneidet, so sind  $\alpha \delta$  und  $\alpha' \delta$  entsprechende Strahlen in den Büscheln  $\alpha(\alpha' \beta' \gamma')$  und  $\alpha'(\alpha \beta \gamma)$ , aber dem  $\alpha \delta$  entspricht in dem Büschel  $m(\alpha b c)$  der Strahl  $m \delta$ , und dem  $\alpha' \delta$  in dem Büschel  $m(\alpha' b' c')$  der nämliche Strahl  $m \delta$ , folglich entspricht in den Büscheln  $m(\alpha b c)$  und  $m(\alpha' b' c')$  der Strahl  $m \delta$  sich selbst und ist daher ein Doppelstrahl. Dasselbe gilt von  $m \varepsilon$ , welcher nach dem zweiten Schnittpunkte der Geraden  $qr$  mit dem Kreise gerichtet ist. Man gelangt zu demselben Resultat, wenn man statt der Punkte  $\alpha$  und  $\alpha'$  zwei andere entsprechende  $\beta, \beta'$  (oder  $\gamma, \gamma'$ ) als Mittelpunkte der Strahlbüschel  $\beta(\alpha' \beta' \gamma')$  und  $\beta'(\alpha \beta \gamma)$  (oder  $\gamma(\alpha' \beta' \gamma')$  und  $\gamma'(\alpha \beta \gamma)$ ) anwendet. Diese liegen ebenfalls perspectivisch, und ihr perspectivischer Durchschnitt ist  $pr$  (oder  $pq$ ). Da die gegebenen Büschel nur zwei Doppelstrahlen haben können [64], so müssen die Geraden  $pr$  und  $pq$  den Kreis in den nämlichen Punkten  $\delta$  und  $\varepsilon$  treffen, wie die Gerade  $qr$ , und daher liegen  $pqr$  in einer Geraden. (Schröter. Steiner's Vorlesungen §. 15.)

**73. Aufgabe.** Bei zwei aufeinander liegenden projectivischen Punctreihen die Doppelpunkte zu construiren.

**Auflösung.** Aus einem beliebig gewählten Mittelpunkte  $m$  ziehe man Strahlen  $m(\alpha b c)$  und  $m(\alpha' b' c')$  nach drei Paaren entsprechender Punkte der Punctreihen und construire in den entstehenden projectivischen und concentrischen Strahlbüscheln nach [72] die Doppelstrahlen, so treffen diese den Träger der Punctreihen in den Doppelpunkten [65].

\*) Das Zeichen  $\overline{\wedge}$  bedeutet projectivisches Entsprechen.

DURKEE, Curven dritter Ordnung.

**74. Aufgabe.** Wenn eine Strahleninvolution durch zwei Paare conjugirter Strahlen  $aa'$ ,  $bb'$  gegeben ist, die Doppelstrahlen zu construiren; oder was [67] [44] dasselbe ist, das Strahlenpaar zu construiren, welches jedes der beiden gegebenen Paare harmonisch trennt.

**Auflösung 1.** Die Involution besteht [40, 67] aus zwei concentrischen projectivischen Strahlbüscheln, und zwar entsprechen den Strahlen  $a, a', b, b'$  der Reihe nach die Strahlen  $a', a, b', b$ . Construirt man nach [72] die Doppelstrahlen dieser beiden Büschel, so sind diese die gesuchten Doppelstrahlen der Involution. Diese Construction bleibt ausführbar, da man zu derselben von den Puncten  $p, q, r$  nur zwei bedarf. Der dritte wird aber auch nicht unbestimmt, sondern tritt als der Durchschnittspunct zweier Tangenten an dem Kreise auf.

**Auflösung 2.** Man schneide die Strahleninvolution durch eine beliebige Gerade und construire zu der auf dieser Geraden entstehenden Punctinvolution nach [75. Aufl. 2] die Doppelpuncte. Die letzteren liefern mit dem Mittelpuncte der Strahleninvolution verbunden, die Doppelstrahlen.

**Auflösung 3.** S. [128.]

**75. Aufgabe.** Wenn auf einer Geraden  $A$  eine Punctinvolution durch zwei Paare conjugirter Puncte  $aa'$ ,  $bb'$  gegeben ist, die Doppelpuncte zu construiren; oder was [44] dasselbe ist, das Punctepaar zu construiren, welches die beiden gegebenen Paare gleichzeitig harmonisch trennt.

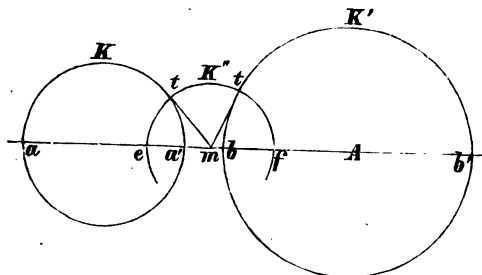
**Auflösung 1.** Aus einem beliebig gewählten Mittelpuncte ziehe man Strahlen nach den gegebenen Puncten und construire zu der entstehenden Strahleninvolution nach [74. Aufl. 1 oder 3] die Doppelstrahlen, so schneiden diese die Gerade  $A$  in den gesuchten Doppelpuncten.

**Auflösung 2.** (Fig. 5.) Man construire zwei Kreise  $K$  und  $K'$  über den Strecken  $aa'$  und  $bb'$  als Durchmesser, und dann einen Kreis  $K''$ , welcher die beiden ersten rechtwinklig schneidet, so trifft dieser die Gerade  $A$  in den gesuchten Doppelpuncten. Man bestimmt daher den Durchschnitt  $m$  der Chordale von  $K$  und  $K'$  mit  $A$ , zieht aus  $m$  eine Tangente  $mt$  an einen der beiden Kreise  $K$  oder  $K'$  und macht auf  $A$  die Strecken  $me = mf = mt$ , so sind  $e, f$  die gesuchten Puncte.

Schneiden sich die Kreise  $K$  und  $K'$ , so werden die Punkte  $e, f$  imaginär.

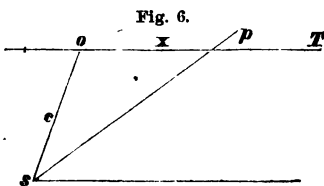
Beweis. Es giebt bekanntlich (*Hesse*. Vorl. aus der anal. Geom. der geraden Linie, etc. Vorl. 12) unendlich viele Kreise  $K''$ , welche die beiden anderen  $K$  und  $K'$  rechtwinklig schneiden.

Fig. 5.



Aber alle diese Kreise  $K''$  bilden ein System von Chordalkreisen, deren Chordale die Gerade  $A$  ist, und deren Mittelpunkte auf der Chordale von  $K$  und  $K'$  liegen. Sie treffen die Gerade  $A$  alle in denselben zwei Punkten  $e, f$ , nämlich den Grenzpunkten der Chordalkreise  $K$  und  $K'$ . Demnach ist  $mt = me = mf$ . Da aber  $mt^2 = ma \cdot ma' = mb \cdot mb'$  ist, so trennen die Punkte  $e, f$  jedes der beiden Paare  $aa'$  und  $bb'$  harmonisch. (S. *Schröter*. Steiner's Vorlesungen §. 8.)

76. Zieht man aus einem beliebigen Mittelpunkte  $s$  Strahlen nach den Punktgruppen einer Involution  $n^{\text{ten}}$  Grades [47], so bilden diese Strahlengruppen eine Strahleninvolution  $n^{\text{ten}}$  Grades. Um diese durch eine Gleichung auszudrücken, nehme man  $s$  (Fig. 6) zum Anfangspunkte eines Parallelkoordinatensystems, dessen Abscissenaxe dem Träger  $T$  der Punktinvolution parallel sei, und lege die Ordinatenaxe durch den Punkt  $o$ , von welchem aus die Strecken  $x$  der Punktinvolution in [47] gerechnet werden; ausserdem sei  $so = c$ . Sind nun  $\xi, \eta$  die Coordinaten in Beziehung auf dieses System, so ist  $\eta = m\xi$  die Gleichung irgend eines durch  $s$  gehenden Strahls  $sp$ , und wenn dieser den Träger  $T$  in dem Abstände  $x$  von  $o$  trifft, so wird seiner Gleichung durch die Werthe  $\xi = x, \eta = c$



genügt, sodass er die Gleichung  $\eta = \frac{c\xi}{x}$  erhält, aus welcher  $x = \frac{c\xi}{\eta}$  folgt. Substituiert man diesen Ausdruck in die Gleichung der Punctinvolution, nämlich in

(1)  $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n + \lambda(b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_n) = 0$ ,  
so erhält man die Strahleninvolution dargestellt durch eine Gleichung von der Form

$$(2) \quad \varphi(\xi, \eta) + \lambda \psi(\xi, \eta) = 0,$$

worin  $\varphi$  und  $\psi$  ganze homogene Functionen  $n^{\text{ten}}$  Grades bedeuten. In diesen Gleichungen sind solche Punctgruppen ( $x$ ) und Strahlengruppen ( $\xi, \eta$ ) entsprechende, welche den nämlichen Werthen von  $\lambda$  angehören. Dreht man die Coordinatenachsen um den Punct  $s$ , oder was auf dasselbe hinaus kommt, dreht man die Strahleninvolution um den Punct  $s$ , so ändert sich die Form der Gleichung (2) nicht. Da man ausserdem von der Gleichung (2) wieder zu (1) zurückgelangen kann, so folgt, dass die erstere Gleichung allemal eine Strahleninvolution darstellt. Wenn nun mehrere Punct- und Strahleninvoluntionen verschiedener (oder auch gleicher) Grade durch Gleichungen von der Form (1) und (2) gegeben sind, so sollen solche Punct- und Strahlengruppen, welche gleichen Werthen von  $\lambda$  angehören, projectivisch entsprechend genannt werden. Punct- und Strahleninvoluntionen vom ersten Grade sind einfache Punctreihen und Strahlenbüschel [48], und es folgt unmittelbar aus [61], dass zwei projectivische Strahleninvoluntionen ersten Grades nichts anderes sind, als zwei projectivische Strahlbüschel. Endlich ergibt sich aus [49], dass eine Strahleninvolution zweiten Grades mit der in [67] schlechtweg so genannten Strahleninvolution zusammenfällt.

### §. 8.

77. Eine Gerade, welche durch die Ecke *III* ( $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ , [13]) des Fundamentaldreiecks und durch einen Punct  $a$  mit den Coordinaten  $a_1, a_2, a_3$  geht, hat die Gleichung

$$a_2x_1 - a_1x_2 = 0.$$

Beweis. Da die zu bestimmende Gerade durch den Durchschnitt der Geraden  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  geht, so ist [57] ihre Gleichung von der Form  $x_1 + \lambda x_2 = 0$ . Da sie aber

auch durch  $a$  geht, so ist  $a_1 + \lambda a_2 = 0$ . Hieraus folgt  $\lambda = -\frac{a_1}{a_2}$ , und wenn man dies substituirt, die obige Gleichung:

78. Bei allen Punkten, welche auf einer durch die Ecke *III* gehenden Geraden liegen, kann man den Coordinaten  $x_1$  und  $x_2$  die nämlichen Werthe zuertheilen, sodass die nähere Bestimmung der Lage des Puncts lediglich von dem Werthe von  $x_3$  abhängt.

Beweis. Ist  $a$  irgend ein auf der Geraden liegender Punct, so hat [77] die Gerade die Gleichung  $a_2 x_1 - a_1 x_2 = 0$ , d. h. für alle auf der Geraden liegenden Puncte ist das Verhältniss  $\frac{x_1}{x_2} = \frac{a_1}{a_2}$ , also constant.

79. (Fig. 7.) Sind  $\alpha, \beta$  zwei Puncte, resp. auf den Seiten  $x_1 = 0, x_2 = 0$  des Fundamentaldreiecks, und  $a_1, a_2, a_3$  die Coordinaten des Punctes  $a$ , in welchem die Geraden  $I\alpha$  und  $II\beta$  sich treffen, so lautet die Gleichung der Geraden  $\alpha\beta$ :

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3} = 0.$$

Beweis. Die Coordinaten der Puncte  $\alpha$  und  $\beta$  sind resp.,  $0, a_2, a_3$  und  $a_1, 0, a_3$  [78]. Setzt man diese in die Gleichung einer beliebigen Geraden

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0,$$

um die Bedingungen auszudrücken, dass diese durch die Puncte  $\alpha$  und  $\beta$  gehe, so erhält man

$$m_2 a_2 + m_3 a_3 = 0$$

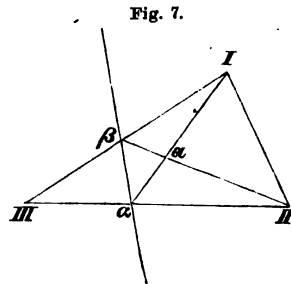
$$m_1 a_1 + m_3 a_3 = 0.$$

Eliminirt man  $m_1, m_2, m_3$  aus diesen drei Gleichungen, so erhält man als Gleichung der Geraden  $\alpha\beta$

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & a_2 & a_3 \\ a_1 & 0 & a_3 \end{vmatrix} = a_2 a_3 x_1 + a_3 a_1 x_2 - a_1 a_2 x_3 = 0,$$

woraus durch Division mit  $a_1 a_2 a_3$  die obige Gleichung folgt.

80. Zieht man durch einen beliebigen Punct  $a$  und die



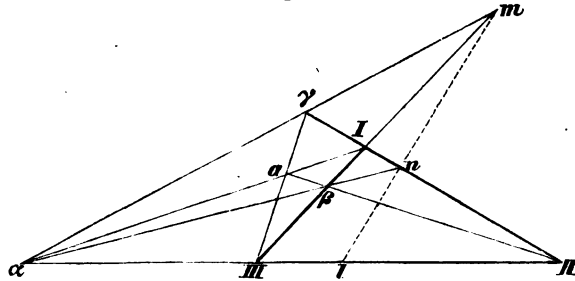


Ecken eines Dreiecks  $I II III$  (Fig. 8) Gerade, welche die gegenüberliegenden Seiten in  $\alpha, \beta, \gamma$  schneiden, und schneidet dann mit  $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$  die dritten Seiten aufs Neue in  $l, m, n$ , so liegen diese drei Punkte in einer Geraden und sind harmonisch zugeordnet zu resp.  $\alpha, \beta, \gamma$  in Beziehung auf  $II III, III I, I II$ . Nimmt man  $I II III$  zum Fundamentaldreieck und nennt  $a_1, a_2, a_3$  die Coordinaten von  $\alpha$ , so ist

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0$$

die Gleichung der Geraden  $l m n$ .

Fig. 8.



Beweis. Die Gleichungen der Geraden  $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$  sind nach [79]

$$\beta\gamma \dots -\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0$$

$$\gamma\alpha \dots \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0$$

$$\alpha\beta \dots \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3} = 0.$$

Die Punkte  $l, m, n$  sind die Schnitte dieser Geraden mit resp.  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ ; daher sind diese Punkte auch die Schnitte folgender Geraden:

$$l \dots x_1 = 0 \text{ mit } \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0$$

$$m \dots x_2 = 0 \text{ mit } \frac{x_3}{a_3} + \frac{x_1}{a_1} = 0$$

$$n \dots x_3 = 0 \text{ mit } \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} = 0.$$

Nun sind aber dieselben Punkte auch die Schnitte von

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$$

mit einer und derselben Geraden, nämlich mit

$$\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0,$$

folglich liegen  $l m n$  alle drei auf dieser Geraden. Nach dem Vorigen sind ferner die Gleichungen der Geraden  $Il, IIm, III n$  folgende:

$$Il \dots \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0, \quad IIm \dots \frac{x_3}{a_3} + \frac{x_1}{a_1} = 0, \\ III n \dots \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} = 0$$

und nach [77] die der Geraden  $I \alpha, II \beta, III \gamma$ :

$$I \alpha \dots \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3} = 0, \quad II \beta \dots \frac{x_3}{a_3} - \frac{x_1}{a_1} = 0, \\ III \gamma \dots \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} = 0,$$

folglich sind [59]  $I (II III l \alpha)$  vier harmonische Strahlen, und daher  $II III l \alpha$  vier harmonische Punkte. Ebenso bei den übrigen.

81. Schneidet eine Gerade die Seiten  $II III, III I, I II$  eines Dreiecks (Fig. 8) in  $l, m, n$ , und sind  $\alpha, \beta, \gamma$  harmonisch zugeordnet zu resp.  $l, m, n$  in Beziehung auf  $II III, III I, I II$ , so schneiden sich die Geraden  $I \alpha, II \beta, III \gamma$  in einem Punkte  $a$ .

Beweis. Ist  $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0$  die Gleichung der gegebenen Geraden in Beziehung auf  $I II III$  als Fundamentaldreieck, so haben die Geraden  $Il, IIm, III n$  die Gleichungen

$$Il \dots \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0, \quad IIm \dots \frac{x_3}{a_3} + \frac{x_1}{a_1} = 0, \\ III n \dots \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} = 0.$$

Sodann ist nach [59]

$$I \alpha \dots \frac{x_2}{a_2} - \frac{x_3}{a_3} = 0, \quad II \beta \dots \frac{x_3}{a_3} - \frac{x_1}{a_1} = 0, \\ III \gamma \dots \frac{x_1}{a_1} - \frac{x_2}{a_2} = 0.$$

Die Summe der linken Theile der drei letzten Gleichungen aber ist identisch Null, mithin genügen die Coordinaten des Durchschnittspuncts der beiden ersten Geraden auch der dritten

Gleichung, und folglich schneiden sich diese drei Geraden in einem Punkte, dessen Coordinaten nach [77]  $a_1, a_2, a_3$  sind.

82. Hat man in der Ebene zwei beliebige Punktepaare  $a a'$  und  $b b'$ , so bestimmen dieselben stets ein drittes Punktepaar  $c c'$  (Fig. 9) als Durchschnitte der Geraden  $(ab, a'b')$

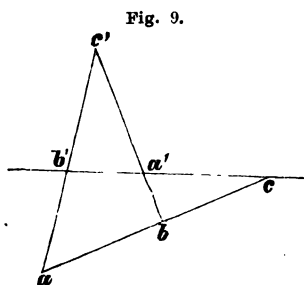


Fig. 9.

und  $(a'b', ab)$ , welche je zwei Punkte, die nicht demselben Paare angehören, verbinden. Solchesechs Punkte bilden dann die Ecken eines vollständigen Vierseits; und nimmt man aus jedem Paare einen Punkt, so erhält man zwei dreipunctige Gruppen z. B.  $abc, a'b'c'$ , die allemal die Eigenschaft haben, dass die Punkte der einen Gruppe  $(abc)$  auf einer

Geraden liegen, und die der anderen  $(a'b'c')$  ein Dreieck bilden, dessen Seiten durch die Punkte der ersten Gruppe hindurchgehen. (Ebenso auch  $a'bc'$  und  $ab'c, ab'c'$  und  $a'bc, etc.$ )

83. Aufgabe. Wenn drei Punkte  $pqr$  gegeben sind, so soll ein vollständiges Viereck  $abcd$  construirt werden, welchem  $pqr$  als Diagonaldreieck angehört. (Fig. 10.)

Auflösung. Einen Punkt  $a$  des Vierecks kann man willkürlich annehmen. Verbindet man diesen mit  $p, q, r$ , so

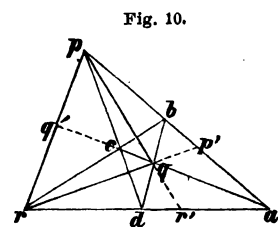


Fig. 10.

sind diese Geraden drei Seiten des gesuchten Vierecks, und man findet die drei übrigen, wenn man zu jeder der Verbindungslinien  $pa, qa, ra$  den zugeordneten harmonischen Strahl construirt in Bezug auf die in der betreffenden Ecke zusammenstossenden Seiten des Dreiecks, wie aus den

harmonischen Eigenschaften des vollständigen Vierecks folgt. (Schröter. Steiner's Vorlesungen pag. 17.) Natürlich braucht diese Construction nur für eine Ecke z. B.  $p$  ausgeführt zu werden; denn ist  $pcd$  der gesuchte harmonische Strahl, so schneidet derselbe die Geraden  $aq$  und  $ar$  in  $c$  und  $d$ , und zuletzt ist  $b = (ap, cr)$  oder  $(ap, dq)$ .

Anmerkung. Es giebt daher unendlich viele vollstän-

dige Vierecke, welchen dasselbe Diagonaldreieck angehört; das Viereck ist aber bestimmt, sobald eine Ecke desselben angenommen ist.

### Dritter Abschnitt.

#### Hilfssätze über Kegelschnitte.

##### §. 1.

84. Die erforderliche und hinreichende Bedingung, dass ein Kegelschnitt, der die Gleichung hat

$$(1) \quad u = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 \\ + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2 = 0,$$

wobei  $a_{hh} = a_{kk}$  sei, aus zwei Geraden besteht, ist

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Beweis. Wenn der Kegelschnitt aus zwei Geraden besteht, also der linke Theil der Gleichung (1) in zwei lineare Factoren zerfällt, so seien

$$P = p_1x_1 + p_2x_2 + p_3x_3 \quad Q = q_1x_1 + q_2x_2 + q_3x_3$$

diese Factoren, also

$$u = PQ.$$

Dann hat man

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = q_iP + p_iQ.$$

Für den Punct  $m$ , in welchem die beiden Geraden sich schneiden, verschwinden  $P$  und  $Q$  gleichzeitig, daher ist für diesen Punct auch gleichzeitig

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0,$$

oder

$$(2) \quad \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= 0, ! \end{aligned}$$

d. h. der Punct  $m$  ist der gemeinschaftliche Durchschnitt dieser drei Geraden. Eliminirt man aber  $x_1 x_2 x_3$  aus den Gleichungen (2), so folgt  $D = 0$ .

Umgekehrt: ist  $D = 0$ , so bestehen die drei Gleichungen (2) gleichzeitig, und daher giebt es drei Zahlen  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ , von der Eigenschaft, dass wenn man die linken Theile dieser Gleichungen mit ihnen multiplicirt, und die Producte addirt, die Summe identisch Null ist. Für diese Zahlen ist daher

$$\lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \lambda_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

Führt man nun statt der Variabeln  $x_1, x_2, x_3$  drei andere  $y_1, y_2, y_3$  ein, indem man setzt

$$x_1 = y_1 + \lambda_1 y_3, \quad x_2 = y_2 + \lambda_2 y_3, \quad x_3 = \lambda_3 y_3,$$

so ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y_3} &= \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial y_3} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial y_3} + \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial y_3} \\ &= \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \lambda_3 \frac{\partial u}{\partial x_3}; \end{aligned}$$

also verschwindet  $\frac{\partial u}{\partial y_3}$ , und folglich wird dann  $u$  eine homogene Function 2<sup>ten</sup> Grades von  $y_1$  und  $y_2$  und enthält  $y_3$  nicht. Eine homogene Function von zwei Variabeln aber lässt sich stets in lineare Factoren zerlegen. (Vgl. *Hesse*. Zur Theorie der ganzen homogenen Functionen. Crelle's Journ. Bd. 56, pag. 268.)

## §. 2.

85. Der geometrische Ort der Durchschnitte entsprechender Strahlen zweier projectivischer Strahlbüschel ist ein Kegelschnitt, welcher durch die Mittelpuncte der beiden Strahlbüschel geht.

Beweis. Bedeuten  $A, A', B, B'$  lineare Ausdrücke, so sind [61]

$$A + \lambda A' = 0 \qquad B + \lambda B' = 0$$

die Gleichungen zweier projectivischer Strahlbüschel, und gleichen Werthen von  $\lambda$  gehören entsprechende Strahlen zu. Man erhält daher den geometrischen Ort der Durchschnitte entsprechender Strahlen, wenn man  $\lambda$  eliminirt. Das giebt

$$AB' - A'B = 0,$$

welches, wie man sieht, ein Kegelschnitt ist, der durch die Durchschnitte der Geradenpaare  $A=0$ ,  $A'=0$  und  $B=0$ ,  $B'=0$  geht.

86. Zieht man aus zwei Puncten  $m$ ,  $m'$  eines Kegelschnittes Strahlen nach allen übrigen Puncten  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$ , ... desselben, so sind die Strahlbüschel  $m(a, b, c, d, \dots)$  und  $m'(a, b, c, d, \dots)$  projectivisch, und je zwei Strahlen entsprechende, die nach demselben Puncte des Kegelschnitts gerichtet sind.

Beweis. Betrachtet man zunächst nur drei Puncte  $a, b, c$ , so ist der Kegelschnitt durch sie und durch  $m, m'$  bestimmt; zugleich aber sind durch die zwei Strahlengruppen  $m(a, b, c)$  und  $m'(a, b, c)$  auch [61] [35] zwei projectivische Strahlbüschel bestimmt, deren entsprechende Strahlenpaare  $md$ ,  $m'd$ , etc. sich nach [85] auf dem Kegelschnitte  $mm'abc$  schneiden, folglich sind umgekehrt je zwei nach demselben Puncte des Kegelschnitts gerichtete Strahlen einander projectivisch entsprechend.

87. (Fig. 11.) Bezeichnet man sechs Puncte eines Kegelschnittes in beliebiger Reihenfolge genommen mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 und bildet aus ihnen, indem man je zwei auf einander folgende durch eine Gerade verbindet, ein einfaches Sechseck, so liegen die Durchschnittspuncte der drei Paare gegenüberliegender Seiten

$$(12, 45) = h, \quad (23, 56) = k, \quad (34, 61) = l$$

auf einer Geraden. (*Pascal's Theorem.*)

Beweis. Bezeichnet man die durch die Puncte 12, 23, etc. gehenden Geraden durch  $A_{12} = 0$ ,  $A_{23} = 0$ , etc., so kann man den Kegelschnitt, weil er sowohl durch 1 2 3 4 als auch durch 4 5 6 1 geht, in folgenden Formen darstellen

$$A_{12}A_{34} - \lambda A_{14}A_{23} = 0 \quad \text{und} \quad A_{45}A_{61} - \mu A_{41}A_{56} = 0,$$

wo  $\lambda, \mu$  gewisse constante Factoren bedeuten. Die linken Theile dieser Gleichungen müssen daher bis auf einen constanten Factor  $\nu$  identisch sein; d. h. es ist

$$A_{12}A_{34} - \lambda A_{14}A_{23} \equiv \nu(A_{45}A_{61} - \mu A_{41}A_{56}),$$

also auch

$$A_{12}A_{34} - \nu A_{45}A_{61} \equiv A_{14}(\lambda A_{23} - \mu \nu A_{56}).$$

Setzt man dies gleich Null, so erhält man die Gleichung eines Kegelschnitts, welcher, wie die linke Seite zeigt, durch folgende vier Punkte geht:

$$(A_{12}, A_{45}) = h, (A_{34}, A_{61}) = l, (A_{12}, A_{61}) = 1, (A_{34}, A_{45}) = 4.$$

Wegen der rechten Seite aber besteht dieser Kegelschnitt aus den beiden Geraden  $A_{14} = 0$  und  $\lambda A_{23} - \mu \nu A_{56} = 0$ , und da die erstere die Gerade 14 ist, so muss die letztere die Gerade  $h1$  sein. Aber, wie ihre Gleichung zeigt, geht diese durch den Durchschnitt  $(A_{23}, A_{56}) = k$ , also liegen  $h, k, l$  auf einer Geraden. (*Salmon. Anal. Geom. d. Kegelschnitte, deutsch von Fiedler, 2<sup>te</sup> Aufl. pag. 298.*)

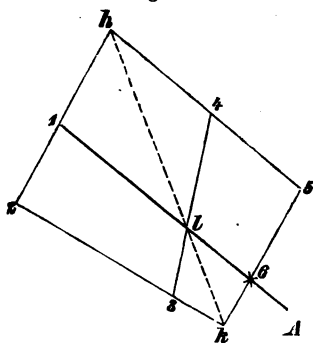
88. Liegen sechs Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 so, dass die Durchschnittspunkte

$$(12, 45) = h, (23, 56) = k, (34, 61) = l$$

auf einer Geraden liegen, so befinden sie sich auf einem Kegelschnitte. (Fig. 11.)

Beweis. Durch fünf von den sechs Punkten z. B. 1, 2, 3, 4, 5 ist ein Kegelschnitt  $K$  bestimmt. Wenn nun  $x$  der Punkt ist, in welchem  $l1$  diesen Kegelschnitt zum zweiten Male schneidet, so muss dieser nach [87] auch auf der Geraden  $k5$  liegen. Der Annahme nach aber ist 6 der Durchschnitt von  $k5$  und  $l1$ , also fällt 6 mit  $x$  zusammen und befindet sich daher auf dem Kegelschnitte  $K$ .

Fig. 11.



89. Aufgabe. Wenn ein Kegelschnitt durch fünf Punkte 1, 2, 3, 4, 5 gegeben ist, einen beliebigen sechsten Punkt desselben zu construiren, z. B. denjenigen Punkt 6, in welchem eine durch 1 beliebig gezogene Gerade  $A$  den Kegelschnitt zum zweiten Male schneidet. (Fig. 11.)

Constructionsvorschrift. Man bezeichne die gegebenen Punkte in beliebiger Ordnung mit 1, 2, 3, 4, 5 und bestimme

$$(12, 45) = h, (34, A) = l, (23, h1) = k,$$

so ist

$$(k\ 5, A) = 6$$

der gesuchte Punkt.

**Beweis.** In Folge dieser Construction liegen die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 so, dass sie die in [88] angegebene Bedingung erfüllen, und daher befindet sich 6 auf dem durch 1, 2, 3, 4, 5 bestimmten Kegelschnitte und zugleich auf der Geraden  $A$ .

**Bemerkung.** Diese Construction ändert sich nicht, wenn an die Stelle zweier gegebener Punkte einer, und ausserdem die Tangente in demselben tritt. Denn man braucht dann nur den gegebenen Berührungspunkt als zwei, und zwar zwei aufeinander folgende Punkte zu betrachten, und die Tangente als die Verbindungsgerade derselben.

**90. Aufgabe.** Wenn ein Kegelschnitt durch fünf Punkte 1, 2, 3, 4, 5 gegeben ist, in einem derselben, z. B. 1, die Tangente zu construiren. (Fig. 12.)

**Constructionsvorschrift.** Man bezeichne die gegebenen Punkte in beliebiger Ordnung mit 1, 2, 3, 4, 5 und bestimme

$$(12, 45) = h,$$

$$(23, 51) = k,$$

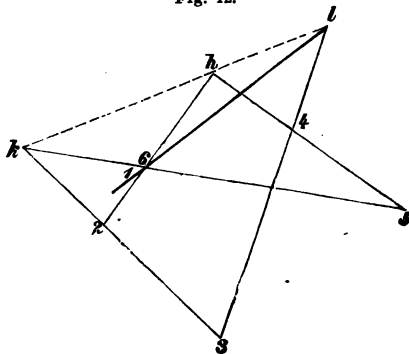
$$(34, hk) = l,$$

so ist  $l1$  die gesuchte Tangente in 1.

**Beweis.** Denkt man sich in 1 zwei Punkte 1, 6 zusammenliegend, so vertritt die Gerade 51 die Stelle der Geraden 56. Der Construction zufolge und wegen [88] liegen dann auf der Geraden  $l1$  zwei Punkte 6, 1 des Kegelschnittes in 1 vereinigt, und daher ist  $l1$  Tangente.

**91. Aufgabe.** Wenn zwei projectivische Strahlbüschel durch je drei Strahlen  $m(a\ b\ c)$  und  $m'(a'\ b'\ c')$  gegeben sind, zu einem vierten gegebenen Strahl  $md$  des ersteren, den entsprechenden  $m'd'$  in dem letzteren zu construiren.

Fig. 12.





**Auflösung.** Man bezeichne mit  $\alpha, \beta, \gamma$  die Durchschnitte der entsprechenden Strahlenpaare  $(ma, m'a')$ ,  $(mb, m'b')$ ,  $(mc, m'c')$ , und denke durch die Punkte  $mm'\alpha\beta\gamma$  einen Kegelschnitt gelegt. Construiert man dann nach [89] den Punkt  $\delta$ , in welchem die Gerade  $md$  diesen Kegelschnitt trifft, so ist  $m'\delta$  der gesuchte Strahl  $m'd'$ . — Aus [86]. (Andere Constructionen S. Schröter. Steiner's Vorlesungen §. 10.)

**92. Aufgabe.** Wenn ein Kegelschnitt durch fünf Punkte 1, 2, 3, 4, 5 gegeben ist, die Durchschnitte desselben mit einer beliebigen Geraden  $A$ , welche durch keinen jener fünf Punkte hindurch geht, zu construiren.

**Auflösung.** Man betrachte zwei jener fünf Punkte z. B. 1 und 5 als Mittelpunkte zweier Strahlbüschel, und schneide mit den Strahlen 1(2 3 4) und 5(2 3 4) die Gerade  $A$  resp. in  $abc$  und  $a'b'c'$ , so sind dies entsprechende Punkte zweier auf  $A$  liegender projectivischer Punktreihen [86, 65]. Construiert man nach [73] die Doppelpunkte  $e, f$  der letzteren, so erhält man die verlangten Durchschnitte. — Denn alsdann sind  $1e$  und  $5e$  entsprechende Strahlen, und daher [85] liegt  $e$  auf dem Kegelschnitte; ebenso bei  $f$ .

**93.** Bei drei unter einander projectivischen Strahlbüscheln [1], [2], [3] giebt es drei Punkte von der Art, dass durch einen und denselben drei entsprechende Strahlen der drei Büschel gehen.

**Beweis.** Der geometrische Ort der Durchschnitte entsprechender Strahlen von [1] und [2] ist ein Kegelschnitt  $K_3$ , der durch 1 und 2 geht [85], sodass für jeden Punkt  $x$  desselben  $1x$  und  $2x$  entsprechende Strahlen sind. Ebenso ist der geometrische Ort der Durchschnitte entsprechender Strahlen von [1] und [3] ein Kegelschnitt  $K_2$ , der durch 1 und 3 geht, der Art dass für jeden Punkt  $x$  desselben die Strahlen  $1x$  und  $3x$  einander entsprechen. Ist also  $x$  ein Durchschnitt der Kegelschnitte  $K_3$  und  $K_2$ , so entsprechen einander alle drei Strahlen  $1x, 2x, 3x$ , und  $x$  ist einer der gesuchten Punkte. Eine Ausnahme tritt hier aber ein, wenn  $x$  auf 1 fällt, denn dann entspricht den Strahlen 21 und 31 nicht der nämliche Strahl in [1], sondern dem ersteren die Tangente an  $K_3$  und dem letzteren die an  $K_2$ , also sind 21 und 31 nicht entsprechende

Strahlen. Die gesuchten Punkte sind demnach die drei Punkte  $x y z$ , welche die Kegelschnitte  $K_3$  und  $K_2$  ausser 1 mit einander gemein haben. Diese Punkte müssen übrigens auch auf dem Kegelschnitt  $K_1$  liegen, welcher den geometrischen Ort der Durchschnitte entsprechender Strahlen der Büschel [2] und [3] bildet, und daher durch 2 und 3 geht. Da dieser Kegelschnitt durch die Punkte 2, 3,  $x, y, z$  schon vollständig bestimmt ist, so geht er im Allgemeinen nicht durch 1.

### §. 3.

94. Legt man durch einen beliebigen Punkt  $x$  eine Transversale, welche einen Kegelschnitt in  $z'$  und  $z''$  schneidet, und bestimmt den zu  $x$  in Bezug auf  $z', z''$  zugeordneten harmonischen Punkt  $y$ , so heisst dieser ein zu  $x$  in Bezug auf den Kegelschnitt conjugirter Pol. Natürlich ist dann auch  $x$  conjugirter Pol zu  $y$ .

95. Ein Punkt  $x$  hat in Bezug auf einen Kegelschnitt  $u = 0$  unendlich viele conjugirte Pole, nämlich auf jeder durch  $x$  gehenden Transversale einen. Alle diese aber liegen auf einer Geraden, welche die Polare von  $x$  bezüglich des Kegelschnittes heisst, und deren Gleichung bei veränderlichen  $y_i$  ist:

$$\Delta_y(u_x) = y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

Der Punkt  $x$  heisst dann der Pol dieser Geraden.

Beweis. Sind  $x, y$  zwei beliebige Punkte, und  $z$  ein auf ihrer Verbindungslinie liegender Punkt, so kann man [19] die Coordinaten des letzteren setzen:

$$z_i = x_i + \lambda y_i.$$

Liegt aber  $z$  auf dem Kegelschnitte  $u = 0$ , so ist

$$u(x_1 + \lambda y_1, x_2 + \lambda y_2, x_3 + \lambda y_3) = 0.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck nach Potenzen von  $\lambda$ , so erhält man nach [4]

$$(1) \quad u_x + \lambda \Delta_y(u_x) + \frac{\lambda^2}{2} \Delta_y^2(u_x) = 0,$$

und dann gehören die beiden Wurzeln  $\lambda$  dieser Gleichung den beiden Durchschnitten  $z', z''$  der Geraden  $x y$  mit dem Kegelschnitte zu. Sind nun aber  $x y$  und  $z' z''$  zwei Paare zuge-

ordneter harmonischer Punkte, so müssen [25] die den Punkten  $z'$ ,  $z''$  zugehörigen Werthe von  $\lambda$  gleich und entgegengesetzt sein. Folglich muss

$$\Delta_y(u_x) = 0$$

sein. Dreht man nun die Gerade  $xy$  um den Punkt  $x$ , so dass  $y$  veränderlich wird, so müssen seine Coordinaten dabei der vorigen Gleichung genügen, und daher beschreibt der Punkt  $y$  eine Gerade.

Zusatz. Hieraus folgt: Besteht der Kegelschnitt aus zwei Geraden,  $ma$  und  $mb$ , welche sich in  $m$  schneiden, so ist die Polare eines Punktes  $x$  in Bezug auf dieses Geradenpaar der zu  $mx$  zugeordnete harmonische Strahl in Beziehung auf  $ma$  und  $mb$ .

96. Die Polare eines Punktes  $x$  bezüglich eines Kegelschnitts geht durch die Berührungspunkte der aus  $x$  an den Kegelschnitt gehenden Tangenten. — Denn fallen  $z'$ ,  $z''$  in einen Punkt zusammen, so fällt auch  $y$  in diesen Punkt.

97. Ist  $a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 = 0$  die Gleichung einer beliebigen Geraden, so findet man die Coordinaten  $x_i$  ihres Pols bezüglich eines Kegelschnittes  $u = 0$  durch Auflösung der Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_2} : \frac{\partial u}{\partial x_3} = a_1 : a_2 : a_3.$$

Denn die Polare des Pols  $x$  hat nach [95] die Gleichung

$$\Delta_y(u_x) = y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0;$$

soll also  $x$  der Pol der gegebenen Geraden, oder diese die Polare von  $x$  sein, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass die Coefficienten der letzten Gleichung denen der gegebenen proportional sind.

98. Liegt ein Punkt  $x$  auf dem Kegelschnitte  $u = 0$ , so ist bei veränderlichen  $y_i$

$$\Delta_y(u_x) = 0$$

die Gleichung der Tangente an dem Kegelschnitte im Punkte  $x$ .

Beweis. In diesem Falle ist in der Gleichung (1) in [95]  $u_x = 0$ , und wenn ausserdem die Gerade  $xy$  den Kegelschnitt berührt, so fallen die Durchschnitte  $z'$ ,  $z''$  beide in  $x$

hinein, sodass die Gleichung (1) dann zwei gleiche Wurzeln  $\lambda = 0$  hat. Damit dies eintrete, muss  $\Delta_y(u_x) = 0$  sein, und da diese Gleichung den geometrischen Ort der Punkte  $y$  angiebt, für welche die Gerade  $xy$  den Kegelschnitt berührt, so ist sie die Gleichung der Tangente.

99. Hieraus folgt unmittelbar: Die Polare bezüglich eines Kegelschnittes von einem Punkte  $x$ , welcher auf dem Kegelschnitte selbst liegt, ist die Tangente an dem Kegelschnitte in dem Punkte  $x$ .

100. Liegt ein Punkt  $b$  auf der Polare eines Punktes  $a$ , so geht die Polare von  $b$  durch  $a$  hindurch.

Beweis. Die Polaren der Punkte  $a$  und  $b$  sind [95] resp.

$$\Delta_y(u_a) = 0 \quad \Delta_y(u_b) = 0.$$

Liegt nun  $b$  auf der ersteren Polare, so ist  $\Delta_b(u_a) = 0$ . Da aber diese Gleichung (nach [5] für  $n = 2$ ) sich auch schreiben lässt:  $\Delta_a(u_b) = 0$ , so wird der Gleichung der Polare von  $b$  genügt, wenn man  $a$  statt  $y$  setzt.

101. Man hat daher zusammenfassend: Die Verbindungsgerade zweier zu demselben Punkte conjugirter Pole\* ist die Polare dieses letzteren Punktes. Der Durchschnitt der Polaren zweier Punkte ist der Pol der Verbindungsgeraden jener Punkte. Die Polaren aller Punkte, welche auf einer Geraden  $G$  liegen, bilden einen Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt  $m$  der Pol von  $G$  ist. Alle Punkte einer Polare  $G$  sind conjugirte Pole zu dem Pol  $m$  dieser Geraden.

#### §. 4.

##### 102. Die Gleichung

$$(1) \quad a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 = 0$$

stellt einen Kegelschnitt dar, welcher durch die Ecken des Fundamentaldreieckes geht, und umgekehrt hat die Gleichung jedes diesem Dreiecke umschriebenen Kegelschnittes die obige Form. Die Tangenten in den Ecken des Dreiecks schneiden die gegenüberliegenden Seiten in drei Punkten, welche in einer Geraden liegen; und deren Gleichung ist:

$$(2) \quad \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0.$$

**Beweis.** Die Gleichung (1) wird erfüllt, sobald zwei Coordinaten gleichzeitig Null sind; daher geht der Kegelschnitt durch die Ecken des Fundamentaldreiecks; und umgekehrt: wenn dies der Fall ist, wenn also der Gleichung des Kegelschnitts durch das gleichzeitige Verschwinden je zweier Coordinaten genügt werden soll, so kann sie die Quadrate der Coordinaten nicht enthalten. Die Tangente in irgend einem Punkte  $y$  hat nach [98] die Gleichung

$$y_1(a_2x_3 + a_3x_2) + y_2(a_3x_1 + a_1x_3) + y_3(a_1x_2 + a_2x_1) = 0.$$

Mithin sind die Tangenten in den Ecken des Dreiecks

$$\frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0, \quad \frac{x_3}{a_3} + \frac{x_1}{a_1} = 0, \quad \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} = 0;$$

diese aber schneiden die gegenüberliegenden Seiten in den nämlichen Punkten, wie die Gerade (2).

### 103. Die Gleichung

$$\sqrt{a_1x_1} + \sqrt{a_2x_2} + \sqrt{a_3x_3} = 0,$$

oder rational gemacht

$$(1) \quad a_1^2x_1^2 + a_2^2x_2^2 + a_3^2x_3^2 - 2a_2a_3x_2x_3 \\ - 2a_3a_1x_3x_1 - 2a_1a_2x_1x_2 = 0$$

stellt einen Kegelschnitt dar, welcher die Seiten des Fundamentaldreiecks berührt; und umgekehrt: jeder solche Kegelschnitt kann durch eine Gleichung von obiger Form dargestellt werden. Die Coefficienten  $a_1, a_2, a_3$  haben die Eigenschaft, dass die Gerade

$$(2) \quad a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$$

die Seiten des Fundamentaldreiecks in denjenigen Punkten schneidet, welche den Berührungspunkten in Beziehung auf die Ecken des Dreiecks harmonisch zugeordnet sind.

**Beweis.** Setzt man in (1) z. B.  $x_3 = 0$ , so erhält man  $(a_1x_1 - a_2x_2)^2 = 0$ ; d. h. die Gerade  $x_3 = 0$  schneidet den Kegelschnitt in zwei zusammenfallenden Punkten, nämlich da, wo dieser von zwei mit

$$a_1x_1 - a_2x_2 = 0$$

zusammenfallenden Geraden getroffen wird. Die Seite  $x_3 = 0$  berührt also den Kegelschnitt, und die vorige Gerade ver-

bindet den Berührungspunct mit der Ecke *III*. Für den Durchschnitt der Geraden (2) mit  $x_3 = 0$  aber erhält man

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0,$$

und diese Gerade verbindet diesen Durchschnitt mit der Ecke *III*. Da nun nach [59]

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0, \quad a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0$$

vier harmonische Strahlen sind, so sind deren Durchschnitte mit  $x_3 = 0$  vier harmonische Punkte. — Wenn ein Kegelschnitt nicht eine Gleichung von der Form (1) hat, so kann er nicht alle Seiten des Fundamentaldreiecks berühren, da man dann nicht für  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  und  $x_3 = 0$  jedesmal ein vollständiges Quadrat erhalten würde.

**104.** Berührt ein Kegelschnitt die Seiten eines Dreiecks, so schneiden sich die Geraden, welche die Berührungspunkte mit den gegenüberliegenden Ecken verbinden, in einem Punkte. — Denn nimmt man das Dreieck als Fundamentaldreieck an und stellt den Kegelschnitt durch die Gleichung (1) in [103] dar, so haben jene Geraden die Gleichungen

$$a_1 x_1 - a_2 x_2 = 0, \quad a_2 x_2 - a_3 x_3 = 0, \quad a_3 x_3 - a_1 x_1 = 0,$$

deren Summe identisch Null ist.

## §. 5.

**105.** Das System der Kegelschnitte, welche durch die nämlichen vier Punkte hindurchgehen, heisst ein Kegelschnittbüschel, und die vier gemeinsamen Punkte die Basispunkte des Büschels. Bezeichnen  $u = 0$  und  $v = 0$  irgend zwei Kegelschnitte desselben, so lassen sich alle übrigen durch die Gleichung

$$u + \lambda v = 0$$

darstellen, wenn dem  $\lambda$  andere und andere Werthe zuertheilt werden. Denn diese Gleichung stellt einen Kegelschnitt dar, welcher durch die Punkte geht, in denen  $u=0$  und  $v=0$  sich schneiden. Will man aber einen bestimmten Kegelschnitt des Büschels fixiren, so hat man nur nöthig, ausser den vier Basispunkten noch irgend einen fünften Punct  $e$  anzunehmen, durch welchen dieser Kegelschnitt hindurch gehen soll. Bezeichnen dann  $u', v'$  die Werthe, welche die Functionen  $u, v$

in dem Punkte  $e$  annehmen, so hat man für diesen  $u' + \lambda v' = 0$  und daraus  $\lambda = -\frac{u'}{v'}$ . Demnach kann  $\lambda$  auch stets so bestimmt werden, dass  $u + \lambda v = 0$  einen bestimmten Kegelschnitt des Büschels darstellt. Durch jeden Punkt der Ebene geht daher nur ein solcher Kegelschnitt.

**106.** Sind  $a, b, c, d$  die Basispunkte eines Kegelschnittbüschels, und  $p$  der Durchschnitt zweier gegenüberliegender Seiten des vollständigen Vierecks  $abcd$ , z. B.  $ab$  und  $cd$ , so ist die Polare von  $p$  in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels die nämliche Gerade, nämlich die Verbindungslinie der Durchschnitte der beiden anderen Paare gegenüberliegender Seiten ( $ac, bd$ ) und ( $ad, bc$ ).

**Beweis.** Diese Verbindungslinie schneidet die Geraden  $pab$  und  $pcd$  in zwei Punkten, welche harmonisch zugeordnet sind zu  $p$  in Beziehung auf resp.  $ab$  und  $cd$ . (S. u. a. *Schröter*. Steiner's Vorlesungen über synthetische Geometrie §. 9.) Da nun die Geraden  $pab$  und  $pcd$  für alle Kegelschnitte des Büschels Secanten sind, so ist [95] jene Verbindungslinie die Polare von  $p$  in Beziehung auf jeden Kegelschnitt des Büschels.

**107.** Hieraus folgt: Sind  $p, q, r$  die drei Diagonalepunkte des vollständigen Vierecks  $abcd$ , so ist in dem Dreiecke  $pqr$  jede Seite die Polare der gegenüberliegenden Ecke in Beziehung auf alle Kegelschnitte des Büschels, welcher  $abcd$  zu Basispunkten hat.

**108.** Ein Dreieck, bei welchem in Beziehung auf einen Kegelschnitt jede Seite die Polare der gegenüberliegenden Ecke ist, heisst diesem Kegelschnitte conjugirt. — Demnach ist das Dreieck  $pqr$ , welches dem aus den vier Basispunkten  $abcd$  eines Kegelschnittbüschels gebildeten vollständigen Viereck als Diagonaldreieck angehört, allen Kegelschnitten dieses Büschels conjugirt.

**109.** Die Form, welche die Gleichung eines Kegelschnittes erhält, wenn man ein ihm conjugirtes Dreieck zum Fundamentaldreieck annimmt, ist

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = 0.$$

**Beweis.** Die Polare eines Punktes  $x$  in Beziehung auf einen Kegelschnitt  $u = 0$  hat nach [95] die Gleichung

$$y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

Soll nun zuerst die Seite  $y_3 = 0$  die Polare der Ecke  $III$  ( $x_1 = 0, x_2 = 0$ ) sein, so muss sich diese Gleichung für  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 0$  auf  $y_3 = 0$  reduciren, es müssen also  $\frac{\partial u}{\partial x_1}$  und  $\frac{\partial u}{\partial x_2}$  für diese Werthe verschwinden, und da es lineare Functionen sind, frei von  $x_3$  sein. Ist nun im Allgemeinen

$$u = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{31}x_3x_1 + 2a_{12}x_1x_2, \\ (a_{\lambda\lambda} = a_{\lambda\lambda})$$

so ist

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_1} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_2} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_3} = a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3.$$

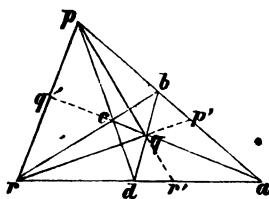
Es muss daher zuerst  $a_{13} = a_{23} = 0$  sein, und dadurch geht die Gleichung der Polare über in

$$y_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + y_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) + y_3a_{33}x_3 = 0.$$

Da nun aber diese Gleichung ferner für  $x_2 = 0$  und  $x_3 = 0$  sich auf  $y_1 = 0$  reduciren soll, so muss auch  $a_{12} = 0$  sein.

**110.** Alle Kegelschnitte, welche durch einen Punkt  $a$  gehen und demselben Dreiecke  $pqr$  conjugirt sind, bilden einen Kegelschnittbüschel und haben ausser  $a$  diejenigen Punkte  $b, c, d$  zu Basispunkten, welche mit  $a$  zusammen das vollständige Viereck bilden, von welchem  $p, q, r$  die Diagonalepunkte sind. (Fig. 10.)

Fig. 10.



**Beweis.** Durch eine Ecke  $a$  ist das Viereck  $abcd$  bestimmt. Construirt man es nach [83] und schneidet die Seiten des Dreiecks  $qr, rp, pq$  mit den Geraden  $ap, aq, ar$  resp. in  $p', q', r'$ , so erhält man vermöge der Construction des Vierecks zugeordnete Paare harmonischer Punkte; z. B. auf  $ap$  sind  $pp'$  und  $ab$  zwei solche Paare. Demnach gehen alle durch  $a$  gelegten Kegelschnitte, für welche  $qr$  die Polare von  $p$  ist, nach [95] auch durch  $b$ . Und ebenso verhält es sich auch bei den anderen Punkten.



**111.** Die Polaren eines beliebigen Punktes  $p$  (der nicht die in [106] betrachtete Lage hat) in Beziehung auf sämtliche Kegelschnitte eines Büschels schneiden sich in einem und demselben Punkte  $q$ . Dieser ist dann [101] ein zu  $p$  conjugirter Pol in Bezug auf jeden Kegelschnitt des Büschels und heisst daher der zu  $p$  in Beziehung auf den Kegelschnittbüschel conjugirte Pol. Natürlich ist dann auch  $p$  der zu  $q$  conjugirte Pol in Beziehung auf denselben Büschel.

Beweis. Stellt man nach [105] irgend einen Kegelschnitt des Büschels durch die Gleichung  $u + \lambda v = 0$  dar, so erhält man [95] für die Polare von  $p$  in Beziehung auf diesen Kegelschnitt die Gleichung

$$\Delta_x(u_p) + \lambda \Delta_x(v_p) = 0.$$

Für verschiedene Werthe von  $\lambda$  aber schneiden sich [56] alle diese Geraden in einem und demselben Punkte.

**112.** Zieht man in den vier Basispunkten eines Kegelschnittbüschels die Tangenten an sämtliche Kegelschnitte, so bilden diese Tangenten vier unter sich projectivische Strahlbüschel, indem diejenigen Tangenten, welche den nämlichen Kegelschnitt berühren, entsprechende Strahlen sind.

Beweis. Sind  $a, b, c, d$  die Basispunkte eines Kegelschnittbüschels  $u + \lambda v = 0$  [105], so erhält man nach [98] für den Tangentenbüschel in  $a$  die Gleichung

$$\Delta_x(u_a) + \lambda \Delta_x(v_a) = 0$$

und daraus die drei anderen Tangentenbüschel, wenn man  $b, c, d$  an Stelle von  $a$  setzt. Daher [61] sind diese vier Strahlbüschel projectivisch, und diejenigen Strahlen entsprechende, welche gleichen Werthen von  $\lambda$  angehören, also den nämlichen Kegelschnitt berühren.

**113.** Wenn ein Strahlbüschel und ein Kegelschnittbüschel durch Gleichungen von der Form  $A + \lambda B = 0$  und  $u + \lambda v = 0$  dargestellt sind, so heissen dieselben projectivisch in Ansehung derjenigen einander entsprechenden Strahlen und Kegelschnitte, welche gleichen Werthen von  $\lambda$  angehören. Dann folgt aus [112], dass die Tangentenbüschel in den vier Basispunkten ebenfalls dem Strahlbüschel projectivisch sind, und dass einem bestimmten Strahle des letzteren gleichzeitig ein Kegelschnitt und dessen Tangenten in den Basispunkten projectivisch entsprechen.

**114.** Die Polaren eines Punctes  $p$  in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte eines Büschels bilden einen Strahlbüschel, der zu dem Kegelschnittbüschel projectivisch ist. — Denn der von den Polaren in Bezug auf den Kegelschnittbüschel  $u + \lambda v = 0$  gebildete Strahlbüschel hat nach [111] die Gleichung

$$\Delta_x(u_p) + \lambda \Delta_x(v_p) = 0$$

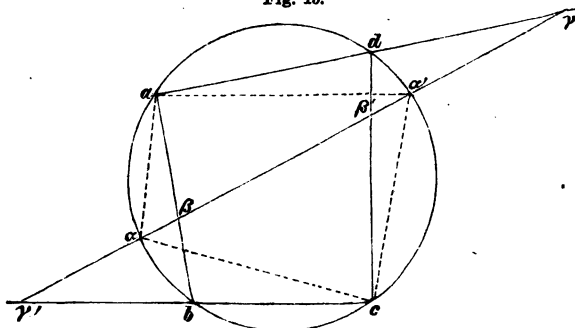
und ist daher nach [113] dem Kegelschnittbüschel  $u + \lambda v = 0$  projectivisch.

### §. 6.

**115.** Eine beliebige Transversale wird von den einzelnen Kegelschnitten eines Büschels in conjugirten Punctepaaren einer Involution geschnitten.

Beweis 1. Seien (Fig. 13)  $abcd$  die Basispunkte des Kegelschnittbüschels,  $\alpha\alpha'$  die Schnitte einer Transversale  $T$

Fig. 13.



mit irgend einem Kegelschnitte des Büschels, ferner  $\beta, \beta'$  die Schnitte von  $T$  mit  $ab, cd$ , und  $\gamma\gamma'$  die Schnitte von  $T$  mit  $ad, bc$ . Dann sind [86] folgende zwei Strahlbüschel projectivisch:

$$a(\alpha \beta \alpha' d) \wedge c(\alpha \beta \alpha' d),$$

und daher [65] auch ihre Durchschnitte mit  $T$ , also ist [33]

$$(\alpha \beta \alpha' \gamma) = (\alpha \gamma' \alpha' \beta).$$

Aber nach [21] hat man

$$(\alpha \gamma' \alpha' \beta) = (\alpha' \beta' \alpha \gamma')$$

also ist auch

$$(\alpha \beta \alpha' \gamma) = (\alpha' \beta' \alpha \gamma').$$

Man hat demnach zwei aufeinanderliegende projectivische Punctreihen, in welchen  $\beta\beta'$  und  $\gamma\gamma'$  entsprechende Punctepaare sind, und ausserdem  $\alpha\alpha'$  einander involutorisch entsprechen, folglich ist [42]  $\alpha\alpha'$  ein conjugirtes Punctepaar der durch  $\beta\beta'$  und  $\gamma\gamma'$  bestimmten [43] Involution. (*Salmon. Anal. Geom. der Kegelschnitte*, deutsch von *Fiedler*. 2. Aufl. pag. 332.)

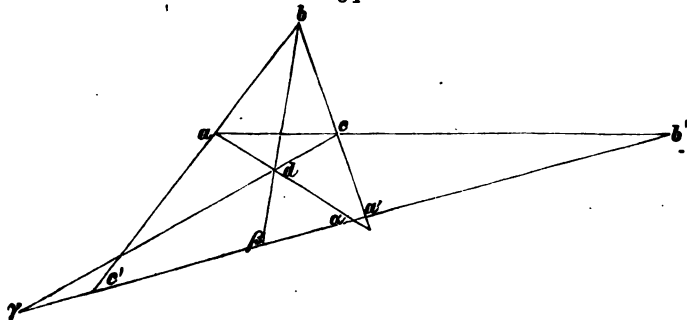
Beweis 2. Stellt man den Kegelschnittbüschel durch die Gleichung  $u + \lambda v = 0$  dar und bezieht diese auf ein System von Parallelcoordinaten  $x, y$ , dessen  $x$ -Axe mit der Transversale zusammenfällt, so erhält man, wenn man  $y = 0$  setzt, für die Abscissen der Durchschnitte der Transversale mit den Kegelschnitten des Büschels eine Gleichung von der Form

$$a_0 x^2 + a_1 x + a_2 + \lambda(b_0 x^2 + b_1 x + b_2) = 0.$$

Mithin bilden die Durchschnittspaare der Transversale mit den Kegelschnitten nach [49] conjugirte Paare einer Involution. — Dieser Beweis zeigt, dass der Satz auch dann noch gültig bleibt, wenn die Durchschnittspunkte imaginär werden, ja selbst dann noch, wenn sie sich auf imaginäre Kegelschnitte beziehen.

116. Eine beliebige Transversale schneidet die drei Paare gegenüberliegender Seiten eines vollständigen Vierecks  $abcd$  in conjugirten Paaren einer Involution. — Aus [115], denn diese drei Geradenpaare sind drei Kegelschnitte eines Büschels mit den Basispunkten  $abcd$ .

Fig. 14.



117. Aufgabe. Wenn zwei Paare conjugirter Puncte einer Involution  $a'a, b'b$  gegeben sind, zu einem gegebenen Puncte  $c'$  den conjugirten  $\gamma$  zu construiren.

Auflösung 1. (Fig. 14.) Man ziehe durch  $a', b', c'$  drei

Gerade, welche sich nicht in einem Punkte schneiden, sondern ein Dreieck bilden, und bezeichne die Ecken desselben so mit  $a, b, c$ , dass  $bc, ca, ab$  resp. durch  $a', b', c'$  gehen; suche dann den Durchschnitt  $(aa', b\beta) = d$  und ziehe  $cd$ , so schneidet diese Gerade den Träger der Involution in dem gesuchten Punkte  $\gamma$ . — Denn  $abcd$  sind dann die Ecken eines vollständigen Vierecks, dessen Seitenpaare in  $a'a, b'\beta, c'\gamma$  geschnitten werden. [116.]

Auflösung 2. S. [128.]

118. Unter den Kegelschnitten eines Büschels giebt es stets zwei (reelle oder imaginäre), welche eine beliebig gegebene Gerade  $G$  berühren; und die Berührungspunkte sind die Doppelpunkte der durch den Kegelschnittbüschel auf  $G$  erzeugten Involution [115]. (Dabei ist ein Geradenpaar das sich auf  $G$  schneidet, als ein diese Gerade berührender Kegelschnitt gerechnet.)

Beweis. Die durch den Kegelschnittbüschel auf  $G$  erzeugte Involution besitzt stets [38] zwei reelle oder imaginäre Doppelpunkte. In jedem derselben sind zwei conjugirte Punkte und daher auch die Durchschnitte von  $G$  mit einem Kegelschnitte vereinigt; daher berührt  $G$  in jedem Doppelpunkte einen Kegelschnitt.

119. Sind  $p$  und  $q$  zwei conjugirte Pole in Beziehung auf einen Kegelschnittbüschel [111], so sind diese zugleich die Punkte, in denen die Gerade  $pq$  von zweien Kegelschnitten des Büschels berührt wird und daher [118] auch die Doppelpunkte der durch den Büschel auf  $pq$  erzeugten Involution.

Beweis. Ist  $K$  der durch  $p$  gehende Kegelschnitt des Büschels, so ist  $pq$  die Tangente desselben in  $p$ ; denn diese Tangente ist [99] die Polare von  $p$  in Bezug auf  $K$  und muss folglich [111] durch  $q$  gehen. Aus demselben Grunde ist  $pq$  auch in  $q$  die Tangente an demjenigen Kegelschnitte  $K'$  des Büschels, der durch  $q$  geht.

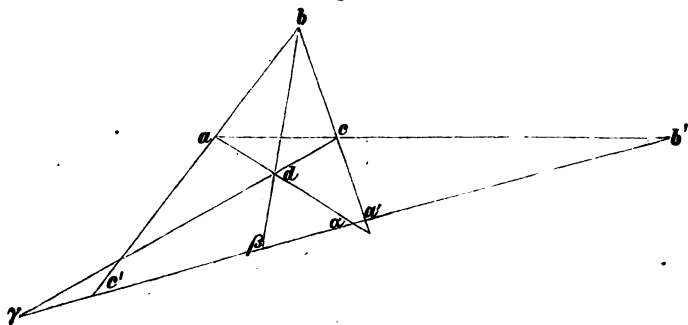
120. Schneidet man die Seiten  $bc, ca, ab$  (Fig. 14) eines Dreiecks durch eine Transversale  $T$  in den Punkten  $a', b', c'$  und bestimmt dann zu diesen die conjugirten Punkte  $\alpha, \beta, \gamma$  irgend einer Involution, so schneiden sich die Verbindungsgeraden  $aa', b\beta, c'\gamma$  in einem Punkte  $d$ .

Beweis. Man nehme auf der Transversale  $T$  die Punkte  $\alpha, \beta$  beliebig an, so ist [43] durch die Paare  $a'\alpha, b'\beta$  eine Involution bestimmt, also ist dann auch der zu  $c'$  conjugirte Punkt  $\gamma$  vollständig bestimmt. Nun sei  $d$  der Durchschnitt der Geraden  $a\alpha, b\beta$ ; dann bilden die Punkte  $abcd$  ein vollständiges Viereck, dessen Seitenpaare von  $T$  in conjugirten Punktepaaren einer Involution geschnitten werden [116]. Zwei der Letzteren sind  $a'\alpha$  und  $b'\beta$ , gebildet auf den Seitenpaaren  $(bc, ad)$  und  $(ac, bd)$ . Das dritte Seitenpaar ist  $ab, cd$ , und da nun  $c'$  auf  $ab$  liegt, so muss der zu  $c'$  conjugirte Punkt  $\gamma$  auf  $cd$  liegen, oder  $c\gamma$  muss durch  $d$  gehen. (*Cremona. Curve plane. art. 109.*)

121. Sind  $aa', bb'$  irgend zwei Paare conjugirter Pole in Bezug auf einen Kegelschnitt  $K$ , so ist das nach [82] durch diese beiden Punktepaare bestimmte dritte Punktepaar  $cc'$  ebenfalls ein Paar conjugirter Pole in Bezug auf  $K$ . (*Hesse. De curvis et superficiebus secundi ordinis. Crelle's Journ. Bd. 20. pag. 301.*)

Beweis. Sei die Bezeichnung der Punkte  $cc'$  so gewählt, dass  $abc$  ein Dreieck bilden, und  $a'b'c'$  in gerader Linie liegen [82] (Fig. 14). Auf dieser Geraden bestimme man zu jedem der Punkte  $a', b', c'$  den conjugirten Pol in Bezug auf

Fig. 14.



$K$ . Seien diese der Reihe nach  $\alpha, \beta, \gamma$ . Dann ist [94] jedes der drei Paare  $a'\alpha, b'\beta, c'\gamma$  ein harmonisch zugeordnetes Paar in Bezug auf die Durchschnitte der Geraden  $a'b'c'$  mit dem Kegelschnitt  $K$ , und folglich [45] sind diese sechs Punkte in Involution. Daher schneiden sich [120] die Geraden  $a\alpha, b\beta, c\gamma$  in einem Punkte  $d$ . Nun sind  $a$  und  $\alpha$  beide conjugirte Pole zu  $a'$ , also ist [101]  $a\alpha$  die Polare von  $a'$  in Bezug auf  $K$ ; ebenso

ist  $b\beta$  die Polare von  $b'$ , und daher der Durchschnitt  $d$  von  $aa$  und  $b\beta$  der Pol von  $a'b'$ . Alle Punkte dieser Geraden sind demnach [101] conjugirte Pole zu  $d$ , also unter andern auch  $c'$  und  $\gamma$ . Aber die beiden letzteren sind selbst conjugirte Pole, demnach ist sowohl  $d$  als auch  $\gamma$  conjugirter Pol zu  $c'$ , oder  $d\gamma$  ist die Polare von  $c'$ ; aber  $d\gamma$  geht durch  $c$ , also ist auch  $c$  conjugirter Pol zu  $c'$  in Bezug auf  $K$ . (*Cremona. Curve plane art. 109.*)

## §. 7.

122. Sind  $abcd$  die Basispunkte eines Kegelschnittbüschels, und legt man durch zwei derselben z. B.  $ab$  einen festen Kegelschnitt  $S$ , so schneidet dieser die Kegelschnitte des Büschels in Punktepaaren  $\alpha\alpha'$ ,  $\beta\beta'$ ,  $\xi\xi'$ , etc. Die Verbindungslinien dieser Paare, also die Linien  $\alpha\alpha'$ ,  $\beta\beta'$ ,  $\xi\xi'$ , etc. laufen dann durch einen festen Punkt der Geraden  $cd$ .

Beweis. Bezeichnet man die Geraden  $ab$  und  $cd$  resp. durch  $A_{ab} = 0$  und  $A_{cd} = 0$ , und mit  $K = 0$  irgend einen Kegelschnitt des Büschels, so kann jeder Kegelschnitt  $X = 0$  des Büschels durch die Gleichung

$$X = K + \lambda A_{ab} A_{cd} = 0$$

dargestellt werden, wenn  $\lambda$  einen veränderlichen Parameter bedeutet. Bezeichnet man aber die beiden Durchschnitte (ausser  $a, b$ ) der Kegelschnitte  $S$  und  $K$  durch  $\alpha$  und  $\alpha'$ , und mit  $A_{\alpha\alpha'} = 0$  die Gerade  $\alpha\alpha'$ , so kann der Kegelschnitt  $S$  durch die Gleichung

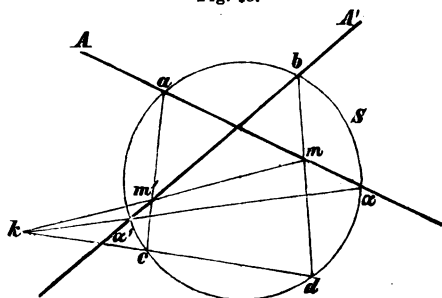
$$S = K + \kappa A_{ab} A_{\alpha\alpha'} = 0$$

dargestellt werden. Die Durchschnitte  $ab \xi\xi'$  von  $X$  und  $S$  müssen daher der Gleichung

$$X - S = A_{ab}(\lambda A_{cd} - \kappa A_{\alpha\alpha'}) = 0$$

genügen, d. h. auf den Geraden  $A_{ab} = 0$  und  $\lambda A_{cd} - \kappa A_{\alpha\alpha'} = 0$  liegen. Die erstere verbindet die Punkte  $a, b$ , also die letztere die Punkte  $\xi, \xi'$ ; aber diese geht für jeden Werth von  $\lambda$  durch den Punkt, in welchem sich  $cd$  und  $\alpha\alpha'$  schneiden. (*Salmon. Anal. Geom. d. Kegelschn. deutsch von Fiedler. 2. Aufl. pag. 297.*)

Fig. 15.

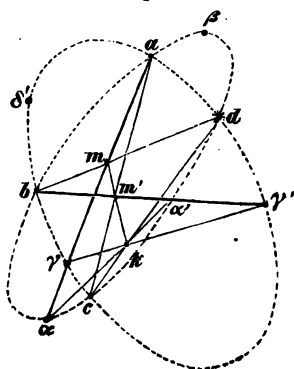


123. Lässt man an Stelle des Kegelschnitts  $S$  in [122] zwei resp. durch  $a$  und  $b$  gehende Geraden treten, so folgt: (Fig. 15). Legt man durch zwei Basispunkte  $a, b$  eines Kegelschnittbüschels  $[abcd]$  je eine Transversale  $A$  und  $A'$ ,

so schneidet jeder Kegelschnitt des Büschels jede dieser beiden Transversalen in einem Punkte:  $\alpha$  und  $\alpha'$ . Die Verbindungslinien  $\alpha\alpha'$  je zweier solcher dem nämlichen Kegelschnitte angehöriger Punkte schneiden sich alle in demselben Punkte, bilden also einen Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt auf  $cd$  liegt. Die Kegelschnitte des Büschels erzeugen daher auf den Transversalen  $A$  und  $A'$  zwei projectivische und perspectivisch liegende Punktreihen. — Man findet den Mittelpunkt  $k$  des Strahlbüschels am einfachsten, wenn man die Durchschnitte  $m$  und  $m'$  der Transversalen  $A$  und  $A'$  mit einem der beiden Geradenpaare  $(ac, bd)$  oder  $(ad, bc)$ , als einem Kegelschnitt des Büschels, aufsucht und den Durchschnitt von  $mm'$  mit  $cd$  bestimmt. (Cremona. Curve plane art. 63.)

124. Aufgabe. (Fig. 16.) Wenn zwei Kegelschnitte durch je fünf Punkte  $abca\beta$  und  $abc\gamma'\delta'$ , von welchen drei  $abc$  beiden gemeinschaftlich angehören, gegeben sind, ihren vierten Durchschnittspunkt  $d$  zu construiren. (Dabei können auch zwei der gegebenen Punkte zusammenfallen, wenn dann nur ihre Verbindungslinie als Tangente des Kegelschnitts ebenfalls gegeben ist.)

Fig. 16.



Auflösung 1. Man betrachte  $aa$  und  $b\gamma'$  als zwei Transversalen  $A$  und  $A'$  und suche nach [89] den Punkt  $\gamma$ , in welchem  $A$  den Kegelschnitt  $abc\gamma'\delta'$  schneidet, so wie den Punkt  $\alpha'$ , in welchem  $A'$  den anderen Kegelschnitt  $abca\beta$  schneidet.

Dann sind  $\alpha\alpha'$  und  $\gamma\gamma'$  zwei Paare entsprechender Punkte der nach [123] auf den Transversalen  $A$  und  $A'$  erzeugten Punktreihen, und daher  $k = (\alpha\alpha', \gamma\gamma')$  der Mittelpunkt des zugehörigen Strahlbüschels. Nun liegt  $k$  auch auf  $cd$ , also muss  $d$  auf  $ck$  liegen; bezeichnet man ferner mit  $m$  und  $m'$  die Punkte, in welchen die Transversalen  $A$  und  $A'$  das Geradenpaar  $ac, bd$  schneiden, d. h. ist  $m = (a\alpha, bd)$ ,  $m' = (b\gamma', ac)$ , so geht auch  $mm'$  durch  $k$ . Nachdem daher die Punkte  $\alpha', \gamma$  und  $k = (\alpha\alpha', \gamma\gamma')$  gefunden sind, ist die weitere Constructionsvorschrift folgende: Man bestimme  $m' = (b\gamma', ac)$ ,  $m = (a\alpha, m'k)$  und dann  $d = (ck, bm)$ . [Oder mit Benutzung des Geradenpaares  $ad, bc$ : Bestimme  $n = (a\alpha, bc)$ ,  $n' = (b\gamma', nk)$  und dann  $d = (ck, an')$ ]. (*Cremona. Curve plane. art. 64.*)

Auflösung 2. S. [300.]

125. Seien  $abcd$  die Basispunkte eines Kegelschnittbüschels. Legt man durch zwei derselben z. B.  $ab$  einen festen Kegelschnitt  $S$ , so schneidet dieser jeden Kegelschnitt des Büschels in einem Punktepaare  $\alpha\alpha', \beta\beta'$ , etc. Zieht man nun aus einem beliebigen Punkte  $o$  des Kegelschnitts  $S$  Strahlenpaare nach diesen Punktepaaren, so bilden diese Strahlenpaare conjugirte Paare einer Involution.

Beweis. Sei  $\alpha\alpha'$  das Punktepaar, in welchem irgend ein Kegelschnitt  $K$  des Büschels den festen Kegelschnitt  $S$  schneidet. Da dann die Punkte  $abcd\alpha\alpha'$  alle auf  $K$  liegen, so ist [86]

$$(1) \quad a(cda\alpha') \overline{\wedge} b(cda\alpha').$$

Nun gibt es unter den Kegelschnitten des Büschels zwei Geradenpaare, die die Verbindungslinie der gewählten Punkte  $ab$  nicht enthalten, nämlich  $(ac, bd)$  und  $(ad, bc)$ . Die Durchschnitte dieser mit  $S$  mögen durch  $\lambda\lambda'$  und  $\mu\mu'$  bezeichnet werden und zwar so, dass

$$\begin{array}{ll} ac \text{ durch } \lambda, & bd \text{ durch } \lambda' \\ ad \text{ durch } \mu, & bc \text{ durch } \mu' \end{array}$$

hindurch gehe. Dann kann die Projectivität (1) geschrieben werden

$$a(\lambda\mu\alpha\alpha') \overline{\wedge} b(\mu'\lambda'\alpha\alpha').$$

Nun liegen aber die Punkte  $ab\lambda\lambda'\mu\mu'\alpha\alpha'$  alle auf  $S$ , daher



kann man [86] die Mittelpuncte  $a, b$  nach irgend einem Puncte  $o$  dieses Kegelschnitts hinverlegen und erhält

$$o(\lambda\mu\alpha\alpha') \overline{\wedge} o(\mu'\lambda'\alpha\alpha').$$

Vertauscht man dann in dem letzteren Büschel die beiden ersten Strahlen mit einander und gleichzeitig auch die beiden letzten, so bleibt ihr Doppelverhältniss ungeändert [22], also folgt

$$o(\lambda\mu\alpha\alpha') \overline{\wedge} o(\lambda'\mu'\alpha'\alpha),$$

d. h.  $o(\lambda\lambda'), o(\mu\mu'), o(\alpha\alpha')$  sind drei Paare einander entsprechenden Strahlen, und bei dem letzten Paare ist das Entsprechen ein involutorisches [41], mithin ist [42] dieses ein conjugirtes Paar in der durch die beiden ersten bestimmten Involution.

**Zusatz.** Da eine Involution aus zwei concentrischen und involutorisch projectivischen Strahlbüscheln besteht, so ist das involutorische Entsprechen der Punctepaare  $\lambda\lambda', \mu\mu', \alpha\alpha', \beta\beta',$  etc., die sämmtlich auf dem Kegelschnitte  $S$  liegen, von der Wahl des Mittelpuncts  $o$  gänzlich unabhängig. Man sagt daher, dass diese Punctepaare eine Involution auf dem Kegelschnitte bilden. Eine solche ist ebenfalls durch zwei Punctepaare vollständig bestimmt, in der Art dass mit Hülfe dieser beiden Paare zu jedem Puncte des Kegelschnitts der ihm conjugirte eindeutig bestimmt ist. Man kann dann den vorigen Satz auch so aussprechen: Ein durch zwei Basispunkte  $ab$  eines Kegelschnittbüschels beliebig gelegter Kegelschnitt  $S$  schneidet die Kegelschnitte des Büschels in conjugirten Punctepaaren einer auf  $S$  liegenden Involution.

**126.** Legt man durch den Mittelpunkt  $o$  einer Strahleninvolution einen beliebigen Kegelschnitt  $S$ , der die conjugirten Strahlenpaare in den Punctepaaren  $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$  etc. schneidet, so dass die letzteren eine Involution auf dem Kegelschnitte  $S$  bilden, so schneiden sich die Verbindungslinien  $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$  etc. in einem und demselben Puncte  $p$  und bilden daher einen Strahlbüschel  $[p]$ .

**Beweis.** Nimmt man auf  $S$  zwei Puncte  $ab$  beliebig an und legt durch  $ab\alpha\alpha'$  und  $ab\beta\beta'$  je einen Kegelschnitt  $K$  und  $K'$ , so treffen sich diese in zwei weitem Puncten  $c, d$ . Betrachtet man nun  $abcd$  als Basispunkte eines Kegelschnitt-

büschels, von welchem  $K$  und  $K'$  zwei Kegelschnitte sind, so bilden die Durchschnittspaare von  $S$  mit den Kegelschnitten dieses Büschels nach [125] conjugirte Paare einer auf  $S$  liegenden Involution. Zwei dieser Paare sind  $\alpha\alpha'$ ,  $\beta\beta'$ , und durch diese ist die Involution vollkommen bestimmt. Mithin muss der durch irgend einen auf  $S$  liegenden Punct  $\gamma$  gehende Kegelschnitt des Büschels  $[abcd]$  den Kegelschnitt  $S$  in dem zu  $\gamma$  conjugirten Puncte  $\gamma'$  treffen. Demnach bilden die Punctepaare  $\alpha\alpha'$ ,  $\beta\beta'$ ,  $\gamma\gamma'$ , etc. zugleich die Durchschnittspaare eines Kegelschnittbüschels mit dem Kegelschnitte  $S$ , der durch zwei Basispunkte des Büschels geht, und folglich [122] treffen sich die Geraden  $\alpha\alpha'$ ,  $\beta\beta'$ ,  $\gamma\gamma'$ , etc. in dem nämlichen Puncte.

127. Der im vorigen Artikel entstandene und aus den Geraden  $\alpha\alpha'$ ,  $\beta\beta'$ ,  $\gamma\gamma'$ , etc. bestehende Strahlbüschel  $[p]$  ist mit der Strahleninvolution  $[o]$  projectivisch, in der Art, dass z. B. dem Strahle  $\alpha\alpha'$  das Strahlenpaar  $o(\alpha\alpha')$  entspricht.

Beweis 1. Nimmt man  $o$  zum Anfangspuncte eines Parallel-Coordinatensystems, in welchem die Coordinaten mit  $\xi$  und  $\eta$  bezeichnet werden, so kann man die Strahleninvolution (zweiten Grades) nach [76] durch eine Gleichung von der Form

$$(1) \quad a_0\eta^2 + a_1\eta\xi + a_2\xi^2 + \lambda(b_0\eta^2 + b_1\eta\xi + b_2\xi^2) = 0$$

darstellen. Löst man diese Gleichung nach  $\frac{\eta}{\xi}$  auf und bezeichnet ihre beiden Wurzeln mit  $k_1$  und  $k_2$ , so werden die irgend einem Werthe von  $\lambda$  zugehörigen und daher conjugirten Strahlen der Involution  $o(\alpha, \alpha')$  durch die Gleichungen

$$L_1 = \eta - k_1\xi = 0 \quad L_2 = \eta - k_2\xi = 0$$

dargestellt. Der Kegelschnitt  $S$ , welcher durch den Anfangspunct  $o$  geht, habe die Gleichung

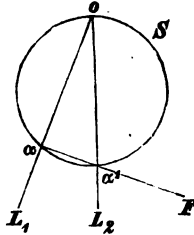
$$S = a\eta^2 + b\eta\xi + c\xi^2 + d\eta + e\xi = 0.$$

Bezeichnet man aber mit

$$F = f\eta + g\xi + h = 0$$

die Gleichung der Geraden  $\alpha\alpha'$ , so ist der Kegelschnitt  $S$  dem

Fig. 17.



von den drei Geraden  $L_1, L_2, F$  gebildeten Dreiecke umschrieben (Fig. 17) und kann daher nach [102] auch in der Form

$$S = lL_1L_2 + mL_1F + nL_2F = 0$$

dargestellt werden. Daraus folgt, dass

$$(mL_1 + nL_2)F \equiv S - lL_1L_2$$

sein muss. Substituiert man darin die Ausdrücke von  $L_1, L_2, S, F$  durch  $\xi$  und  $\eta$ , so erhält man die Identität

$$[(m+n)\eta - (mk_1 + nk_2)\xi][f\eta + g\xi + h] \equiv a\eta^2 + b\eta\xi + c\xi^2 + d\eta + e\xi - l(\eta^2 - (k_1 + k_2)\eta\xi + k_1k_2\xi^2)$$

und daraus für die Coefficienten die Beziehungen

$$(m+n)f = a - l$$

$$(m+n)g - (mk_1 + nk_2)f = b + l(k_1 + k_2)$$

$$- (mk_1 + nk_2)g = c - lk_1k_2$$

$$(m+n)h = d$$

$$- (mk_1 + nk_2)h = e.$$

Eliminirt man mit Hülfe der beiden letzten Gleichungen zunächst  $m$  und  $n$  und setzt zur Abkürzung

$$k_1 + k_2 = s \quad k_1k_2 = p,$$

so geben die drei ersten Gleichungen

$$df = h(a - l)$$

$$dg + ef = h(b + ls)$$

$$eg = h(c - lp),$$

und eliminirt man aus diesen  $l$ , so erhält man zur Bestimmung der Verhältnisse von  $f, g, h$  die Gleichungen

$$(e + ds)f + dg - (b + as)h = 0$$

$$dpf - eg + (c - ap)h = 0$$

und aus diesen

$$f : g : h = (cd - eb - ad \cdot p - ae \cdot s)$$

$$: (-ce + (ae - bd)p - cd \cdot s) : (-e^2 - d^2 \cdot p - de \cdot s).$$

Die Coefficienten der Gleichung der Geraden  $F$  stellen sich also dar als lineare Functionen von  $s$  und  $p$ , ausgedrückt durch

die Coefficienten der Kegelschnittsgleichung  $S = 0$ . Nun ergibt sich aber aus (1)

$$s = -\frac{a_1 + \lambda b_1}{a_0 + \lambda b_0} \quad p = \frac{a_2 + \lambda b_2}{a_0 + \lambda b_0};$$

durch Substitution dieser Ausdrücke werden dann  $f, g, h$  proportional mit linearen Functionen von  $\lambda$ , welche von den Coefficienten der Kegelschnittsgleichung  $S = 0$  und denen der Involutionsgleichung (1) abhängen. Bezeichnet man diese linearen Functionen dadurch, dass man setzt:

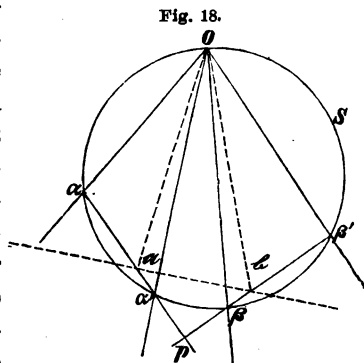
$$f : g : h = f' + f'' \lambda : g' + g'' \lambda : h' + h'' \lambda,$$

so wird die Gleichung der Geraden  $F$  oder  $\alpha\alpha'$

$$F = f' \eta + g' \xi + h' + \lambda(f'' \eta + g'' \xi + h'') = 0.$$

Dadurch bestätigt sich zunächst, dass alle diese Geraden  $F$ , also  $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$ , etc. sich in einem Punkte schneiden, sodass aber ergibt sich, dass eine Gerade  $\alpha\alpha'$  und das ihm zugehörige Strahlenpaar  $o(\alpha\alpha')$  der Involution demselben Werthe von  $\lambda$  angehören, und dass sie daher einander projectivisch entsprechen [76].

Beweis 2. (Fig. 18.) Man kann die Strahlenpaare der Involution  $[o]$  als Kegelschnitte eines Büschels ansehen, dessen vier Basispunkte in  $o$  zusammenfallen; alsdann bilden die Polaren des Punktes  $p$  in Bezug auf diese Geradenpaare nach [114] einen mit diesem Kegelschnittbüschel projectivischen Strahlbüschel, der natürlich seinen Scheitel in  $o$  hat. Nun gehen aber die Polaren von  $p$  in Bezug auf die Geradenpaare  $o(\alpha\alpha'), o(\beta\beta')$  etc. durch die Punkte  $\alpha, \beta$  etc., welche zu  $p$  harmonisch zugeordnet sind in Bezug auf  $\alpha\alpha', \beta\beta'$ , etc. [95], und da die Punctepaare  $\alpha\alpha', \beta\beta'$ , etc. die Durchschnitte des Kegelschnittes  $S$  mit Transversalen bilden, die durch  $p$  gehen, so liegen die Punkte  $\alpha, \beta$ , etc. auf der Polare von  $p$  in Beziehung auf  $S$  [95]. Mithin liegen die Strahlbüschel  $o(\alpha, \beta, \dots)$  und  $p(\alpha\alpha', \beta\beta', \dots)$  perspectivisch und sind da-



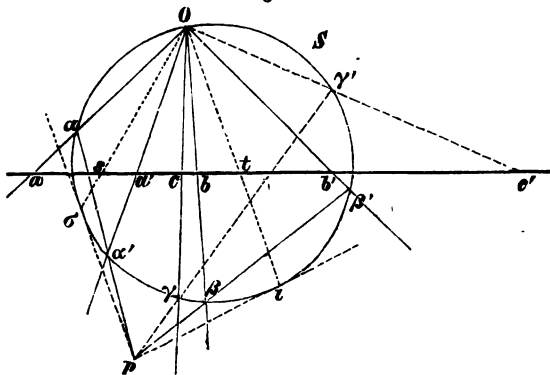
her projectivisch, und folglich ist der letztere Strahlbüschel  $[p]$  auch projectivisch zu der Involution in  $o$ .

Anmerkung. Man bemerke, dass es nicht gestattet sein würde, den Satz [114] anzuwenden auf beliebige Strahlenpaare, die sich alle in demselben Punkte treffen, wohl aber auf solche, die eine Involution bilden, denn diese können durch eine Gleichung von der Form (1) dargestellt werden, und daher bleibt dann die Schlussweise von [114] gültig.

128. Aus [126] ergibt sich eine zweite Auflösung der Aufgabe [117]: Wenn eine Punct- oder Strahleninvolution durch zwei conjugirte Paare gegeben ist, zu einem gegebenen Puncte oder Strahle den conjugirten zu construiren. (Fig. 19.)

Auflösung. Durch den Scheitel  $o$  der Strahleninvolution,

Fig. 19.



(die entweder unmittelbar gegeben ist, oder die man bei gegebener Punctinvolution erhält, wenn man nach den Puncten derselben aus einem beliebigen Punkte  $o$  Strahlen zieht) lege man einen beliebigen Kegelschnitt  $S$  (am einfachsten einen Kreis), schneide diesen mit den gegebenen Strahlenpaaren in  $\alpha\alpha'$  und  $\beta\beta'$ , und mit dem Strahle, dessen conjugirter gefunden werden soll, in  $\gamma$ . Bestimmt man dann den Durchschnitt  $(\alpha\alpha', \beta\beta') = p$ , und schneidet  $S$  mit  $p\gamma$  in  $\gamma'$ , so ist  $o\gamma'$  der verlangte Strahl, welcher bei gegebener Punctinvolution natürlich auch den gesuchten Punct liefert.

Zusatz. Zieht man aus  $p$  die Tangenten an den Kreis  $S$ , so sind die nach den Berührungspuncten  $\sigma$  und  $\tau$  gehenden Strahlen  $o\sigma$  und  $o\tau$  zugleich die Doppelstrahlen der Involution.

## §. 8.

**129. Aufgabe.** Wenn vier Strahlen eines Strahlbüschels  $m'(a'b'c'd')$  und vier Punkte  $abcd$  gegeben sind, so soll der geometrische Ort der Punkte  $x$  bestimmt werden, so dass die von  $x$  nach  $abcd$  gehenden Strahlen den gegebenen  $m'(a'b'c'd')$  der Reihe nach projectivisch entsprechen.

**Auflösung.** Man betrachte  $a$  als Mittelpunkt eines Strahlbüschels  $a(b, c, d)$ , der mit  $m'(b', c', d')$  projectivisch ist, und construire in dem ersteren nach [91] den Strahl  $at$ , welcher dem Strahl  $m'a'$  in Letzterem entspricht, sodass

$$a(t, b, c, d) \overline{\wedge} m'(a', b', c', d').$$

Ist dann  $x$  irgend ein Punkt des Kegelschnittes  $K$ , welcher durch  $abcd$  geht und  $at$  in  $a$  berührt, so ist [86]

$$x(a, b, c, d) \overline{\wedge} a(t, b, c, d),$$

und daher auch

$$x(a, b, c, d) \overline{\wedge} m'(a', b', c', d').$$

Der Kegelschnitt  $K$  ist also der gesuchte geometrische Ort. (*Cremona* art. 62.)

**130. Aufgabe.** Wenn fünf Strahlen  $m'(a', b', c', d', e')$  und fünf Punkte  $a, b, c, d, e$  gegeben sind, so soll der Mittelpunkt  $m$  des Strahlbüschels gefunden werden, dessen nach den gegebenen Punkten gerichtete Strahlen  $m(a, b, c, d, e)$  den gegebenen  $m'(a', b', c', d', e')$  der Reihe nach projectivisch entsprechen.

**Auflösung.** Construirt man nach [91] einen Strahl  $at$  so, dass

$$a(t, b, c, d) \overline{\wedge} m'(a', b', c', d')$$

ist, so ist der geometrische Ort der Punkte  $x$ , welche die Forderung erfüllen, dass

$$x(a, b, c, d) \overline{\wedge} m'(a', b', c', d'),$$

sei, nach [129] ein Kegelschnitt  $K$ , welcher durch  $abcd$  geht und  $at$  in  $a$  berührt. Construirt man nun ferner einen Strahl  $as$  so, dass

$$a(s, b, c, e) \overline{\wedge} m'(a', b', c', e')$$

ist, so ist der geometrische Ort der Punkte  $x$ , für welche

$$x(a, b, c, e) \wedge m'(a', b', c', e')$$

ist, ein zweiter Kegelschnitt  $K'$ , welcher durch  $abce$  geht und  $as$  in  $a$  berührt. Der gesuchte Punkt  $m$  ist demnach der vierte Durchschnittspunkt der beiden Kegelschnitte  $K, K'$ , welche beide durch  $abc$  gehen, und von denen der erste durch die Punkte  $abcd$  und die Tangente  $at$  in  $a$ , und der zweite durch die Punkte  $abce$  und die Tangente  $as$  in  $a$  bestimmt ist. Dieser Durchschnittspunkt kann nach [124] construirt werden. (Cremona art. 62.)

### §. 9.

**131.** Die Gleichung eines Kegelschnittes, welcher zwei Geraden  $A = 0$  und  $B = 0$  in den Punkten berührt, in welchen diese von einer dritten Geraden  $D = 0$  getroffen werden, kann in der Form

$$AB = k^2 D^2$$

geschrieben werden, worin  $k$  eine Constante bedeutet\*); und diese Gleichung stellt bei veränderlichem  $k$  den Kegelschnittbüschel dar, welcher  $A$  und  $B$  zu gemeinschaftlichen Tangenten, und  $D$  zur gemeinschaftlichen Berührungssehne hat. Nimmt man diese Geraden zu Seiten des Fundamentaldreieckes, und schreibt demgemäss  $x_1, x_2, x_3$  für  $A, B, D$ , so heisst die vorige Gleichung

$$(1) \quad x_1 x_2 = k^2 x_3^2.$$

Man kann nun hier die Coordinaten auf eine einfache Weise durch einen veränderlichen Parameter  $\mu$  ausdrücken. Denn legt man durch  $I$  eine beliebige Gerade, so kann diese durch die Gleichung  $x_2 = \mu k x_3$  dargestellt werden. Für den Durchschnitt  $m$  derselben mit dem Kegelschnitte findet man dann, indem man aus (1) einmal  $x_2$  und dann  $x_3$  eliminirt, die Gleichungen  $\mu x_1 = k x_3, \mu^2 x_1 = x_2$ . Die durch einen beliebigen Punkt  $m$  des Kegelschnitts und die Ecken des Fundamentaldreieckes gehenden Geraden haben also durch  $\mu$  ausgedrückt die Gleichungen

\*) Jede der beiden Geraden  $A$  und  $B$  schneidet den Kegelschnitt in zwei zusammenfallenden Punkten, nämlich da, wo dieser von zwei mit  $D$  zusammenfallenden Geraden getroffen wird.

$$(2) \quad \begin{aligned} Im \dots x_2 &= \mu k x_3 \\ II m \dots \mu x_1 &= k x_3 \\ III m \dots \mu^2 x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

und die Coordinaten des Punctes  $m$  sind

$$x_1 : x_2 : x_3 = k : k\mu^2 : \mu.$$

Ebenso hat man für einen zweiten Punct  $m_1$  des Kegelschnittes mit dem Parameter  $\mu_1$  die Coordinaten  $k : k\mu_1^2 : \mu_1$  und erhält dann aus [18] für die Verbindungslinie  $mm_1$  dieser beiden Puncte die Gleichung

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ k & k\mu^2 & \mu \\ k & k\mu_1^2 & \mu_1 \end{vmatrix} = 0,$$

oder nach Unterdrückung des gemeinschaftlichen Factors  $k(\mu - \mu_1)$

$$\mu\mu_1 x_1 + x_2 - k(\mu + \mu_1) x_3 = 0.$$

Fallen die Puncte  $m_1$  und  $m$  zusammen, wird also  $\mu_1 = \mu$ , so ergibt sich ferner für die Tangente an dem Kegelschnitte (1) in einem Puncte  $m$  desselben mit dem Parameter  $\mu$  die Gleichung

$$(3) \quad \mu^2 x_1 + x_2 - 2k\mu x_3 = 0.$$

(Salmon. Anal. Geom. der Kegelschnitte. Deutsch von Fiedler, 2. Aufl. pag. 340.)

**132.** Zieht man aus einem festen Puncte  $\alpha$  Tangenten an alle Kegelschnitte, welche zwei Geraden  $A$  und  $B$  in denselben Puncten berühren, und daher auch die Berührungssehne  $D$  gemeinschaftlich haben, so ist der geometrische Ort der Berührungspuncte ein Kegelschnitt, welcher dem Dreieit  $ABD$  umschrieben ist, und durch den gegebenen Punct  $\alpha$  geht.

**Beweis.** Nimmt man die Geraden  $ABD$  zu Seiten des Fundamentaldreiecks und stellt demgemäss [131] den Kegelschnittbüschel durch die Gleichung

$$x_1 x_2 = k^2 x_3^2$$

dar, so ist die Gleichung der Tangente in irgend einem Puncte mit dem Parameter  $\mu$  an einem der Kegelschnitte nach [131]

$$\mu^2 x_1 + x_2 - 2k\mu x_3 = 0.$$



Soll diese durch den Punct  $\alpha$  gehen, dessen Coordinaten  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  seien, so gilt ferner

$$\mu^2 \alpha_1 + \alpha_2 - 2k\mu \alpha_3 = 0.$$

Die letzte Gleichung ist daher die Bedingung, dass ein dem Parameter  $\mu$  angehöriger Punct auf einem Kegelschnitt, der irgend einem Werthe von  $k$  entspricht, ein Berührungspunct einer von  $\alpha$  ausgehenden Tangente sei. Eliminirt man also aus ihr  $\mu^2$  und  $\mu k$  mit Hülfe der Gleichungen (2) in [131], indem man  $\mu^2 = \frac{x_2}{x_1}$ ,  $\mu k = \frac{x_2}{x_3}$  setzt, so erhält man den geometrischen Ort aller dieser Berührungspuncte:

$$\frac{\alpha_1}{x_1} + \frac{\alpha_2}{x_2} - 2 \frac{\alpha_3}{x_3} = 0,$$

und diese Gleichung stellt für veränderliche  $x_i$  einen Kegelschnitt dar, der durch die Ecken des Fundamentaldreiecks geht. [102]. Da ihr genügt wird, wenn man

$$x_1 : x_2 : x_3 = \alpha_1 : \alpha_2 : \alpha_3$$

setzt, so geht der Kegelschnitt auch durch  $\alpha$ . (Salmon H. pl. Cvs. pag. 160.).

#### Vierter Abschnitt.

##### Hilfssätze über algebraische Curven.

###### §. 1.

**133.** Eine Curve heisst von der  $n^{\text{ten}}$  Ordnung, wenn sie in Punctcoordinaten durch eine Gleichung des  $n^{\text{ten}}$  Grades dargestellt werden kann. Bedeutet also  $u$  entweder eine ganze rationale Function  $n^{\text{ter}}$  Ordnung zweier Parallel-Coordinaten, oder eine solche homogene Function dreier homogener Punctcoordinaten, so ist  $u = 0$  die Gleichung einer Curve  $n$ . O. Tritt dabei der Fall ein, dass die Function  $u$  in zwei oder mehrere rationale Factoren zerlegbar ist, so besteht die Curve  $n$ . O. aus dem Complex zweier oder mehrerer Curven niedrigerer Ordnung. Ist dieser Fall aber nicht vorhanden, so heisst die Curve eine einfache Curve  $n$ . O.

**134.** Eine Curve  $n$ . O.  $u = 0$  wird von einer Geraden im Allgemeinen in  $n$  Puncten geschnitten.

**Beweis.** Verbindet man mit der Gleichung  $u = 0$  die einer Geraden  $A = 0$ , welche vom ersten Grade ist, so liefert die Elimination der einen Coordinate eine Gleichung des  $n^{\text{ten}}$  Grades für die andere Coordinate (oder bei homogenen Coordinaten für das Verhältniss der beiden andern Coordinaten). Da diese Gleichung genau  $n$  Wurzeln besitzt, so erhält man zunächst für die eine Coordinate, und, wenn man dasselbe Verfahren für die andere wiederholt, auch für diese  $n$  Werthe, welche den beiden Gleichungen  $u = 0$  und  $A = 0$  gleichzeitig genügen. Indem man sodann, am einfachsten mit Hilfe der Gleichung  $A = 0$ , ermittelt, welche Werthe der Coordinaten zusammengehören, erhält man die Coordinaten von  $n$  Punkten, welche der Curve  $u = 0$  und der Geraden  $A = 0$  gemeinsam sind.

**135.** Es sind hierbei einige specielle Fälle hervorzuheben:

1) Es können zwei oder mehrere Wurzeln der für die eine Coordinate resultirenden Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades einander gleich werden, und diesen auch gleiche Werthe der anderen Coordinate entsprechen. Dann fallen zwei oder mehrere Durchschnittspunkte der Geraden mit der Curve in einen zusammen.

2) Es können eine oder mehrere Wurzeln der für eine der Coordinaten resultirenden Gleichung  $n^{\text{ten}}$  Grades unendlich gross werden. Dann hat die Gerade mit der Curve einen oder mehrere Punkte im Unendlichen gemein.

3) Es können einige oder alle Wurzeln imaginär ausfallen. Solchen imaginären Coordinaten entsprechen dann allerdings keine angebbaren Punkte mehr. Allein da die Werthe der Coordinaten dann immer noch algebraisch vollkommen bestimmt sind, so betrachtet man sie auch in diesem Falle als zu bestimmten Punkten gehörig, und nennt diese imaginäre Punkte. Solche imaginäre Durchschnittspunkte können aber nur paarweise vorhanden sein, da die imaginären Wurzeln der resultirenden Gleichungen nur paarweise conjugirt vorkommen können. Eine Curve von ungerader Ordnung wird daher von einer Geraden mindestens in einem reellen Punkte getroffen.

**136.** Die im Vorigen hervorgehobenen Fälle bieten keine Ausnahme des Satzes [134] dar. Eine solche tritt aber dann und nur dann ein, wenn die Function  $u$  einen linearen

Factor  $A$  enthält. Denn dann hat die Gerade  $A = 0$  nicht bloss  $n$  Punkte, sondern alle Punkte mit der Curve  $u = 0$  gemein, da diese alsdann aus der Geraden  $A = 0$  und einer Curve  $(n-1)$ . O. besteht. In jedem andern Falle aber, wenn  $A$  nicht ein Factor von  $u$  ist, lassen die Gleichungen  $u = 0$  und  $A = 0$  nur  $n$  Auflösungen zu. Daher schliesst man:

**137.** Wenn eine Gerade mit einer Curve  $n$ . O. mehr als  $n$  Punkte gemeinsam hat, so macht sie einen Theil dieser Curve aus.

**138.** Zwei Curven  $u = 0$ ,  $v = 0$ , resp. von den Ordnungen  $n$  und  $m$  schneiden sich in  $nm$  Punkten. Eine Ausnahme dieses Satzes findet nur dann statt, wenn die Functionen  $u$  und  $v$  einen rationalen Factor gemeinsam haben. In diesem Falle gehört eine und dieselbe Curve niedrigerer Ordnung beiden Curven an, und die letzteren haben dann unendlich viele Punkte mit einander gemein.

**Beweis.** Die Elimination jeder der beiden Coordinaten aus den beiden Gleichungen  $u = 0$  und  $v = 0$  liefert nach [7] für die andere eine Gleichung vom Grade  $nm$ . Es giebt daher für jede der beiden Coordinaten  $nm$  Werthe, welche den gegebenen Gleichungen gleichzeitig genügen. Indem man mit Hülfe der Letzteren ermittelt, welche Werthe der Coordinaten paarweise zusammengehören, erhält man die Coordinaten von  $nm$  Punkten, welche beiden Curven gemeinschaftlich angehören. — Die in [135] gemachten Bemerkungen gelten hier gleichfalls.

**139.** Bei einer Curve  $n$ . O.  $u = 0$  besteht die Function  $u$ , wenn sie vollständig ist, aus  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$  Gliedern.

**Beweis.** Bezeichnet man die homogenen Coordinaten mit  $x_1, x_2, x_3$  und ordnet die Function  $u$  nach Potenzen von  $x_3$ , so kann man der Gleichung  $u = 0$ , indem man mit  $u_n$  eine homogene Function  $n^{\text{ten}}$  Grades von  $x_1$  und  $x_2$  bezeichnet, folgende Form geben

$$u_0 x_3^n + u_1 x_3^{n-1} + u_2 x_3^{n-2} + \dots + u_n = 0.$$

Dann besteht  $u_0$  aus einem Gliede

$u_1$  aus 2 Gliedern

$u_2$  „ 3 „

„ „ „ „ „

$u_n$  „  $n+1$  „

Im Ganzen ist daher die Anzahl der Glieder gleich

$$1 + 2 + 3 + \dots + (n + 1)$$

oder gleich  $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ . (*Salmon*, H. pl. Cvs. pag. 18.)

140. Zur Bestimmung einer Curve  $n$ . O. sind  $\frac{n(n+3)}{2}$  Punkte erforderlich.

Beweis. Setzt man in die allgemeine Gleichung einer Curve  $n$ . O.  $u = 0$  die Coordinaten eines gegebenen Punctes ein, so erhält man eine lineare Gleichung für die unbekannten Coefficienten. Um daher alle Coefficienten bestimmen zu können, müssen so viele Punkte gegeben sein, als die Gleichung  $u = 0$  Coefficienten enthält. Da man nun aber den Coefficienten eines Gliedes durch Division zu Eins machen kann, so enthält die Gleichung  $u = 0$  einen zu bestimmenden Coefficienten weniger als Glieder. Demnach ist die Anzahl dieser Coefficienten, und daher auch die Anzahl der zur Bestimmung der Curve erforderlichen Punkte nach [139] gleich  $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1$ , oder gleich  $\frac{n(n+3)}{2}$ .

141. Ein solches System linearer Gleichungen, wie man hier zur Bestimmung der Coefficienten erhält, kann von verschiedener Beschaffenheit sein. Man erhält bekanntlich die Werthe für die unbekannten Coefficienten in Form von Brüchen, welche einen gemeinschaftlichen Nenner haben. Seien diese

$$\frac{A}{\mathcal{A}}, \frac{B}{\mathcal{A}}, \frac{C}{\mathcal{A}}, \dots \frac{L}{\mathcal{A}}.$$

Es können nun folgende Fälle eintreten: 1)  $\mathcal{A}$  ist von Null verschieden. Dann sind die vorigen Werthe der Coefficienten vollständig bestimmt, also auch die Curve.

2)  $\mathcal{A}$  ist Null, aber die Zähler  $A, B, \dots L$  sind nicht alle Null. Wenn man dann nach Substitution der obigen Werthe in die Gleichung  $u = 0$ , diese mit  $\mathcal{A}$  multiplicirt, so verschwindet aus der resultirenden Gleichung eine gewisse Anzahl von Gliedern, aber nicht alle, weil nicht alle Zähler  $A, B, \dots L$  verschwinden. Mithin erhält man wieder eine ganz bestimmte Gleichung, welche eine ganz bestimmte Curve darstellt.

3) Es verschwindet  $\mathcal{A}$ , und gleichzeitig auch alle Zähler  $A, B, \dots L$ . Dann werden sämtliche Coefficienten unbestimmt. In diesem Falle aber sind die linearen Gleichungen nicht von einander unabhängig, und es giebt für die Unbekannten nicht bloss ein, sondern unendlich viele Systeme von Werthen, welche den Gleichungen genügen. In diesem Falle giebt es daher unendlich viele Curven  $n$ . O., welche durch die gegebenen Punkte  $\frac{n(n+3)}{2}$  Punkte hindurchgehen. Man kann hiernach den Satz aussprechen:

142. Durch  $\frac{n(n+3)}{2}$  willkürlich gegebene Punkte lässt sich stets mindestens eine Curve  $n$ . O. hindurch legen, und diese ist dann in der Regel durch die gegebenen Punkte bestimmt; es kann aber auch der Fall eintreten, dass unendlich viele Curven  $n$ . O. durch jene Punkte möglich sind.

143. Durch  $\frac{n(n+3)}{2} - 1$  beliebig gewählte Punkte gehen unendlich viele Curven  $n$ . O.; alle Curven  $n$ . O. aber, welche durch  $\frac{n(n+3)}{2} - 1$  Punkte gehen, haben ausserdem noch  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  Punkte mit einander gemein, schneiden sich also alle in den nämlichen  $n^2$  Punkten.

Beweis. Man kann hier mit Hülfe der gegebenen Punkte nur  $\frac{n(n+3)}{2} - 1$  lineare Gleichungen zur Bestimmung der Coefficienten der Curvengleichung bilden, also eine Gleichung weniger, als zu dieser Bestimmung erfordert werden, daher bleibt ein Coefficient unbestimmt, und es giebt mithin unendlich viele Curven  $n$ . O., welche durch die gegebenen Punkte gehen. Wenn nun  $u = 0$  und  $v = 0$  zwei solche Curven sind, so stellt die Gleichung  $u + \lambda v = 0$  für jeden Werth von  $\lambda$  eine Curve  $n$ . O. dar, welche durch die sämtlichen Durchschnitte der beiden Curven  $u$  und  $v$ , und daher auch durch die gegebenen Punkte hindurch geht. Aber die Anzahl aller dieser Durchschnitte ist  $n^2$  [138], also schneiden alle Curven, die durch die Gleichung  $u + \lambda v = 0$  dargestellt werden können, die beiden  $u$  und  $v$  ausser in den gegebenen  $\frac{n(n+3)}{2} - 1$  noch in weiteren  $n^2 - \frac{n(n+3)}{2} + 1$  Punkten, und

diese letztere Zahl ist gleich

$$\frac{2n^2 - n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Es kann aber in der That jede durch die gegebenen  $\frac{n(n+3)}{2} - 1$  Punkte gehende Curve durch eine Gleichung von der Form  $u + \lambda v = 0$  dargestellt werden. Denn hebt man irgend eine dieser Curven heraus, so kann man auf ihr einen Punkt  $p$  stets so annehmen, dass dieser zusammen mit den gegebenen Punkten die Curve vollständig bestimmt [142]. Dann kann aber auch  $\lambda$  so bestimmt werden, dass die Curve  $u + \lambda v = 0$ , welche jedenfalls durch die gegebenen Punkte geht, auch den Punkt  $p$  enthält. Denn bezeichnen  $u'$  und  $v'$  die Werthe, welche  $u$  und  $v$  in  $p$  annehmen, so geht die Curve  $u + \lambda v = 0$  durch  $p$ , wenn  $u' + \lambda v' = 0$  oder  $\lambda = -\frac{u'}{v'}$  ist. (Plücker. Algebraische Curven. pag. 8.)

Es folgt nun aber weiter, dass jede durch die gegebenen  $\frac{n(n+3)}{2} - 1$  Punkte gehende Curve durch die Annahme eines weiteren Punktes  $p$  vollständig bestimmt wird, sobald der diesem entsprechende Werth  $\lambda = -\frac{u'}{v'}$  ein bestimmter ist, und dies tritt nur dann nicht ein, wenn  $u'$  und  $v'$  gleichzeitig verschwinden, wenn also  $p$  ein Durchschnitt der beiden Curven  $u$  und  $v$  ist. Demnach:

**144.** Liegen  $\frac{n(n+3)}{2}$  Punkte so, dass zwei Curven  $n$ . O. durch sie hindurch gehen, so kann man unendlich viele Curven durch sie hindurch legen, und alle diese haben mit einander und mit den beiden gegebenen Curven sämtliche  $n^2$  Durchschnitte gemeinschaftlich.

**145.** Ein System von Curven  $n$ . O., die sich alle in den nämlichen  $n^2$  Punkten schneiden, heisst ein Curvenbüschel  $n$ . O., und die  $n^2$  gemeinschaftlichen Durchschnittspunkte heissen die Basispunkte des Büschels. Jede Curve desselben ist nach [143] vollständig bestimmt, sobald auf ihr noch ein weiterer Punkt gegeben ist. Bedeuten  $u = 0$  und  $v = 0$  irgend zwei Curven des Büschels, so lässt sich, wenn

mit  $\lambda$  ein veränderlicher Parameter bezeichnet wird, der Büschel durch die Gleichung

$$u + \lambda v = 0$$

darstellen. Hiermit lassen sich die vorigen Sätze auch so aussprechen:

Alle Curven  $n$ . O., welche durch  $\frac{n(n+3)}{2} - 1$  Punkte gehen, bilden einen Curvenbüschel  $n$ . O. [143].

Die  $n^2$  Durchschnittspunkte zweier Curven  $n$ . O. sind zugleich die Basispunkte eines Curvenbüschels  $n$ . O. — Ferner:

**146.** Sollen  $n^2$  Punkte die Durchschnitte zweier Curven  $n$ . O. und daher [145] auch die Basispunkte eines Curvenbüschels  $n$ . O. sein, so darf man diese nicht alle willkürlich wählen, sondern nur  $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ , d. i.  $n^2 - \frac{(n-1)(n-2)}{2}$  unter ihnen, weil nach [143] die übrigen  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  Punkte durch die ersteren schon mit bestimmt sind.

**147.** Wir wollen die beiden im Vorigen aufgetretenen Zahlen mit besonderen Buchstaben bezeichnen; nämlich es sei

$\mathfrak{A}_n = \frac{n(n+3)}{2}$  die Anzahl der Punkte, welche zur Bestimmung einer Curve  $n$ . O. erforderlich ist.

$\mathfrak{B}_n = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$  die Anzahl der Durchschnitte zweier Curven  $n$ . O., welche nicht willkürlich angenommen werden dürfen.

Dann findet folgende Relation statt, die sich durch Rechnung leicht verificiren lässt:

$$\mathfrak{A}_n - 1 - \mathfrak{A}_{n-p} = np - \mathfrak{B}_p.$$

**148.** Liegen von den  $n^2$  Durchschnitten zweier Curven  $n$ . O. (oder den  $n^2$  Basispunkten eines Curvenbüschels)  $np$  auf einer Curve  $p$ . O.,  $C_p$  (wenn  $p < n$ ), so liegen die übrigen  $n(n-p)$  auf einer Curve  $(n-p)$ . O.,  $C_{n-p}$ .

**Beweis.** Wählt man unter den  $n(n-p)$  übrigen Durchschnitten beliebige  $\mathfrak{A}_{n-p}$  aus, so kann man durch diese eine Curve  $(n-p)$ . O.,  $C_{n-p}$  legen, welche mit  $C_p$  zusammen eine Curve  $n$ . O.,  $(C_p, C_{n-p})$  bildet. Diese geht der Annahme nach durch  $np + \mathfrak{A}_{n-p}$  jener Durchschnitte, welche Zahl nach [147] gleich  $(\mathfrak{A}_n - 1) + \mathfrak{B}_p$  ist. Nun ist  $\mathfrak{B}_p$  entweder Null

(nämlich für  $p = 1$ , oder  $p = 2$ ) oder positiv, daher

$$np + \mathfrak{A}_{n-p} \geq \mathfrak{A}_n - 1;$$

folglich geht die Curve  $n$ . O. ( $C_p, C_{n-p}$ ) sicher durch  $\mathfrak{A}_n - 1$  jener Durchschnittspuncte und daher [143] auch durch alle übrigen. Demnach liegen diese entweder auf  $C_p$  oder auf  $C_{n-p}$ ; aber  $C_p$  kann nicht mehr als die angenommenen  $np$  Puncte enthalten [138], daher müssen alle übrigen  $n(n-p)$  auf  $C_{n-p}$  liegen. (Plücker. Algebr. Curven pag. 12).

## §. 2.

149. Sei  $u = 0$  die Gleichung einer Curve  $n$ . O. in homogenen Coordinaten, und  $x$  und  $y$  zwei beliebige Puncte. Jeder Punct  $z$  auf der Verbindungslinie  $xy$  der letzteren hat [19] die Coordinaten

$$z_i = x_i + \lambda y_i. \quad (i = 1, 2, 3).$$

Nimmt man an, dass der Punct  $z$  zugleich auf der Curve  $u = 0$  liegt, so erhält man, wenn man die vorigen Ausdrücke in diese Gleichung substituirt, nach [4]

$$(1) \quad 0 = u_x + \lambda \Delta_y(u_x) + \frac{\lambda^2}{2!} \Delta_y^2(u_x) + \frac{\lambda^3}{3!} \Delta_y^3(u_x) + \dots \\ + \frac{\lambda^n}{n!} \Delta_y^n(u_x),$$

und dann gehören die  $n$  Werthe von  $\lambda$ , welche dieser Gleichung genügen, den  $n$  Puncten  $z$  an, in welchen die Gerade  $xy$  die Curve schneidet. Liegt der Punct  $x$  auf der Curve, so ist  $u_x = 0$  und die Gleichung (1) hat dann eine Wurzel  $\lambda = 0$ . Man halte nun diesen Punct  $x$  fest, variire aber die Lage des Punktes  $y$ , und gebe diesem solche Lagen, dass  $\Delta_y(u_x) = 0$  wird. Dann hat die Gleichung (1) zwei Wurzeln  $\lambda = 0$ , d. h. die Gerade  $xy$  hat in  $x$  zwei Puncte mit der Curve gemein, oder diese Gerade berührt die Curve in  $x$ . Durch die Gleichung  $\Delta_y(u_x) = 0$  oder nach [1]

$$y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

ist die Lage des Punktes  $y$  nicht vollständig bestimmt, sein geometrischer Ort ist vielmehr eine Gerade, und zwar offenbar die Tangente in  $x$  selbst. (Salmon, H. pl. Cvs. pag. 62.) Daher folgt:



Ist  $x$  ein Punct einer Curve  $u = 0$ , und sind  $y_1, y_2, y_3$  veränderliche Coordinaten, so ist

$$\mathcal{A}_y(u_x) = y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

die Gleichung der Tangente an der Curve im Puncte  $x$ .

**150.** Es kann geschehen, dass während der Punct  $x$  fest gehalten wird, der Ausdruck  $\mathcal{A}_y(u_x)$  für jede Lage des Puncts  $y$  verschwindet, was nur möglich ist, wenn der Punct  $x$  so liegt, dass für ihn gleichzeitig die drei Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

stattfinden. Dann hat die Gl. (1) in [149] für jede Lage der Geraden  $xy$  zwei Wurzeln  $\lambda = 0$ , d. h. diese Gerade trifft in jeder ihrer Lagen die Curve in zwei in  $x$  zusammenfallenden Puncten. In einem solchen Falle geht die Curve selbst zwei Mal durch den Punct  $x$ , und dieser heisst dann ein Doppelpunct der Curve. Demnach ist die Bedingung dafür, dass  $x$  ein Doppelpunct der Curve  $u = 0$  sei, das gleichzeitige Stattfinden der drei Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

Dieses sind drei homogene Gleichungen zwischen den Variablen  $x_1, x_2, x_3$ ; man kann diese daher aus jenen eliminieren und erhält als Resultat eine Bedingungsgleichung zwischen den Coefficienten der Gleichung  $u = 0$ . Hieraus folgt: Eine Curve  $n$ . O. hat im Allgemeinen keine Doppelpuncte, sondern nur dann, wenn zwischen den Coefficienten ihrer Gleichung eine gewisse Bedingungsgleichung besteht.

**151.** Nehmen wir nun an, es sei  $x$  ein Doppelpunct der Curve  $u = 0$ , sodass sowohl  $u_x = 0$ , als auch  $\mathcal{A}_y(u_x) = 0$  ist, letzteres für jede Lage des Puncts  $y$ . Nun möge dieser eine solche Lage annehmen, dass ausserdem auch noch  $\mathcal{A}_y^2(u_x) = 0$  wird; dann werden in der Gleichung (1) in [149] drei Wurzeln  $\lambda$  gleich Null; die Gerade  $xy$  schneidet also die Curve in drei in  $x$  zusammenfallenden Puncten und berührt daher einen der beiden durch den Doppelpunct gehenden Curvenzweige, oder die Gerade  $xy$  ist eine der beiden in dem Doppelpuncte stattfindenden Tangenten. Die Coordinaten des Puncts  $y$  sind nur der Gleichung

$$\Delta_y^2(u_x) = \Sigma \Sigma y_i y_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = 0$$

unterworfen; daher ist  $y$  nicht vollständig bestimmt, sondern sein geometrischer Ort ist, wie diese Gleichung zeigt, ein Kegelschnitt. Da aber für alle diesem Orte angehörigen Lagen von  $y$  die Gerade  $xy$  eine der beiden Tangenten im Doppelpuncte ist, so besteht der geometrische Ort des Punctes  $y$ , eben jener Kegelschnitt, aus diesen beiden Tangenten. Somit gilt:

Ist  $x$  ein Doppelpunct einer Curve  $u = 0$ , so ist die Gleichung

$$(1) \quad \Delta_y^2(u_x) = \Sigma \Sigma y_i y_k \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} = 0$$

bei veränderlichen  $y_i$  die Gleichung der beiden Tangenten in dem Doppelpuncte.

152. Man kann direct zeigen, dass die letzte Gleichung zwei gerade Linien darstellt, wenn  $x$  ein Doppelpunct ist. Nach dem *Euler'schen* Satze [6] ist nämlich, da die partiellen Differentialquotienten  $\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \frac{\partial u}{\partial x_3}$  homogene Functionen vom Grade  $n - 1$  sind,

$$(n - 1) \frac{\partial u}{\partial x_1} = x_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + x_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_3}$$

$$(n - 1) \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} + x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + x_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_3}$$

$$(n - 1) \frac{\partial u}{\partial x_3} = x_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_1} + x_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3 \partial x_2} + x_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2},$$

und diese Ausdrücke müssen verschwinden [150], wenn  $x$  ein Doppelpunct ist. Wir schreiben die hieraus resultirenden Gleichungen etwas einfacher, indem wir uns der Bezeichnung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_h \partial x_k} = u_{hk},$$

bedienen, bei welcher also  $u_{hk} = u_{kh}$  ist, nämlich folgendermassen

$$(2) \quad \begin{aligned} u_{11}x_1 + u_{12}x_2 + u_{13}x_3 &= 0 \\ u_{21}x_1 + u_{22}x_2 + u_{23}x_3 &= 0 \\ u_{31}x_1 + u_{32}x_2 + u_{33}x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Da diese drei Gleichungen zusammen bestehen müssen, so kann man aus ihnen  $x_1, x_2, x_3$  eliminiren und erhält als Resultat

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Dieses aber ist nach [84] die Bedingung, dass der Kegelschnitt (1) in [151], dessen Gleichung mit der neuen Bezeichnung so geschrieben werden kann,

$$(1) \Delta_y^2(u_x) = u_{11} y_1^2 + u_{22} y_2^2 + u_{33} y_3^2 + 2 u_{23} y_2 y_3 + 2 u_{31} y_3 y_1 + 2 u_{12} y_1 y_2 = 0,$$

aus zwei Geraden besteht. (*Salmon*, H. pl. Cvs. pag. 66.)

152<sup>a</sup>. Die aus den zweiten partiellen Differentialquotienten der Function  $u$  gebildete Determinante führt nach *Sylvester* (Cambridge und Dublin math. Journ. VI. pag. 186. S. *Baltzer* Theorie und Anwendung der Determinanten, 2. Aufl. pag. 122) den Namen der *Hesse'schen* Determinante und soll in der Folge durch  $H(u)$  bezeichnet werden, sodass

$$H(u) = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix}$$

ist. Da jeder der zweiten partiellen Differentialquotienten  $u_{hk}$  vom Grade  $n-2$  ist, so ist  $H(u)$  vom Grade  $3(n-2)$ . Betrachtet man darin die Grössen  $x_i$  als veränderlich, so stellt die Gleichung  $H(u) = 0$  eine Curve von der Ordnung  $3(n-2)$  dar, welche die *Hesse'sche* Curve der ursprünglichen Curve  $u = 0$  genannt wird. Da die Gleichung  $H(u) = 0$  sich als unmittelbare Folge der Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

ergeben hat, so zeigt sich, dass die Punkte  $x$  der Curve  $u = 0$ , welche Doppelpunkte sind, zugleich auf der *Hesse'schen* Curve  $H(u) = 0$  liegen. Daher gilt:

Wenn eine Curve  $u = 0$  Doppelpunkte besitzt, so geht die *Hesse'sche* Curve  $H(u) = 0$  durch die Doppelpunkte hindurch.

Die Gleichung  $H(u) = 0$  ist zwar eine Folge der Gleichungen  $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$ , aber diese folgen nicht umgekehrt aus jener; man darf daher nicht umgekehrt schliessen, dass alle Durchschnitte der *Hesse'schen* Curve mit der Curve

$u = 0$  Doppelpuncte der letzteren sind; wir haben im Gegentheil gesehen [150], dass die Curve  $u = 0$  im Allgemeinen gar keine Doppelpuncte besitzt.

**153.** Die beiden Tangenten in einem Doppelpuncte  $x$  können auch in eine zusammenfallen; in diesem Falle heisst der Doppelpunct  $x$  eine Spitze oder ein Rückkehrpunct, und die gemeinschaftliche Tangente eine Rückkehrtangente. Die Rückkehrpuncte bilden also eine specielle Art von Doppelpuncten.\*) In diesem Falle muss der linke Theil der Gleichung (1) in [151] oder [152], welche die beiden Tangenten in dem Doppelpuncte darstellt, aus zwei gleichen linearen Factoren bestehen, also ein vollständiges Quadrat bilden. Daher muss der Ausdruck

$$u_{11}y_1^2 + u_{22}y_2^2 + u_{33}y_3^2 + 2u_{23}y_2y_3 + 2u_{31}y_3y_1 + 2u_{12}y_1y_2$$

von der Form

$$(p_1y_1 + p_2y_2 + p_3y_3)^2 = p_1^2y_1^2 + p_2^2y_2^2 + p_3^2y_3^2 + 2p_2p_3y_2y_3 + 2p_3p_1y_3y_1 + 2p_1p_2y_1y_2$$

sein. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} u_{11} &= p_1^2, & u_{22} &= p_2^2, & u_{33} &= p_3^2 \\ u_{23} &= p_2p_3, & u_{31} &= p_3p_1, & u_{12} &= p_1p_2, \end{aligned}$$

und daraus

$$(u_{23})^2 = u_{22} \cdot u_{33}, \quad (u_{31})^2 = u_{33} \cdot u_{11}, \quad (u_{12})^2 = u_{11} \cdot u_{22},$$

und dann ist

$$p_1y_1 + p_2y_2 + p_3y_3 = \sqrt{u_{11}} \cdot y_1 + \sqrt{u_{22}} \cdot y_2 + \sqrt{u_{33}} \cdot y_3 = 0$$

die Gleichung der Rückkehrtangente.

**154.** Eine einfache Curve  $n$ . O.,  $C_n$  kann nicht mehr als  $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$  Doppelpuncte haben. (Plücker. Alg. Curven. pag. 215.)

Beweis. Hätte sie mehr, also etwa  $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$

\*) Ein Doppelpunct kann auch von der Art sein, dass, obgleich er selbst reell ist, die Tangenten in ihm und daher auch die beiden durch ihn hindurchgehenden Curvenzweige imaginär sind. Dieser Fall tritt ein, wenn die Gleichungen (1) und (2) in [152] reell sind, aber der linke Theil der ersteren aus zwei imaginären linearen Factoren besteht. In diesem Falle heisst der Doppelpunct ein isolirter oder conjugirter Punct.

Doppelpuncte, so könnte man durch diese eine Curve  $(n-2)$ . O.  $C_{n-2}$  hindurch legen. Da hierzu nach [140]

$$\frac{(n-2)(n-2+3)}{2} = \frac{(n-2)(n+1)}{2}$$

Puncte erforderlich sind, so ist die Anzahl der noch fehlenden Puncte gleich

$$\begin{aligned} \frac{(n-2)(n+1)}{2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} - 1 &= \frac{(n-2)(n+1-n+1)-2}{2} \\ &= \frac{2(n-2)-2}{2} = n-3. \end{aligned}$$

Wählt man diese auf der Curve  $C_n$ , so hätten die beiden Curven  $C_n$  und  $C_{n-2}$  erstlich diese  $n-3$  Puncte und dann die  $\frac{(n-1)(n-2)}{2} + 1$  Doppelpuncte mit einander gemein.

Aber da in jedem Doppelpuncte zwei Schnittpuncte vereinigt sind, so wäre die Anzahl der Schnittpuncte beider Curven gleich  $n-3 + (n-1)(n-2) + 2 = (n-2)n + 1$ . Dieses aber ist nicht möglich, so lange  $C_n$  eine einfache Curve ist, denn dann können die Curven  $C_n$  und  $C_{n-2}$  nicht mehr als  $(n-2)n$  Durchschnittspuncte besitzen [138]. (*Salmon. Higher pl. Curves. pag. 31.*)

### §. 3.

155. Wir kehren nun zu den in [149] gemachten Annahmen zurück, dass nämlich der Punct  $x$  ein einfacher Punct der Curve  $u = 0$  sei, und daher die Gleichung  $\Delta_y(u_x) = 0$  für veränderliche  $y$ , die Tangente in diesem Puncte darstellt. Lässt man den Punct  $x$  seine Lage längs der Curve ändern, so kann der Fall eintreten, dass für eine specielle Lage des  $x$  und für besondere Lagen von  $y$  gleichzeitig  $\Delta_y(u_x) = 0$  und  $\Delta_y^2(u_x) = 0$  wird. Dann ist die Gerade  $xy$  immer noch Tangente an der Curve, hat aber in dem Puncte  $x$ , ohne dass dieser ein Doppelpunct ist, drei Puncte mit der Curve gemein. Man sagt dann, die Gerade  $xy$  habe eine dreipunctige Berührung mit der Curve; man nennt ferner einen solchen Punct  $x$  einen Wendepunct (Inflexionspunct) und die Tangente in diesem eine Wendetangente. Die Coordinaten  $y$  müssen jetzt gleichzeitig den Gleichungen  $\Delta_y(u_x) = 0$  und  $\Delta_y^2(u_x) = 0$  genügen, und doch sind ihre Werthe nicht vollständig bestimmt, da ja der Punct  $y$  jede Lage auf der Wende-

tangente  $xy$  haben kann. Jene beiden Gleichungen können daher nicht anders zusammen bestehen, als wenn die in den  $y_i$  lineare Function  $\Delta_y(u_x)$  ein Factor der anderen Function zweiten Grades  $\Delta_y^2(u_x)$  ist. Die letztere muss sich also, wenn der in Rede stehende Fall eintreten soll, in zwei lineare Factoren zerlegen lassen. Die Bedingung dafür ist [152] die Gleichung

$$H(u) = 0.$$

Es ergibt sich also, dass ein Wendepunkt  $x$  der Curve  $u=0$  immer zugleich auf der Hesse'schen Curve liegt.

156. Man kann nun aber auch das Umgekehrte zeigen, nämlich dass jeder Schnittpunkt der Hesse'schen Curve mit der Curve  $u$ , der nicht ein Doppelpunkt ist, ein Wendepunkt sein muss. Wir sahen in [152], dass die Gleichung  $H(u)=0$  einmal als Folge der Gleichungen  $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$  auftreten kann; in diesem Falle ist der Durchschnitt  $x$  der Hesse'schen Curve mit der Curve  $u$  ein Doppelpunkt. Jetzt aber nehmen wir an, dass  $x$  nicht ein Doppelpunkt, sondern ein einfacher Curvenpunkt sei. Alsdann stellt die Gleichung

$$\Delta_y^2(u_x) = 0$$

bei veränderlichen  $y_i$  immer noch einen Kegelschnitt dar. Von diesem lässt sich zuerst zeigen, dass er durch  $x$  hindurch geht. Denn setzt man  $x$  statt  $y$ , so erhält man  $\Delta_x^2(u_x)$ ; dieses aber ist nach [6] gleich  $n(n-1)u_x$  und verschwindet, weil  $x$  auf der Curve  $u=0$  liegt. Ferner aber berührt der Kegelschnitt  $\Delta_y^2(u_x)=0$  die Curve in  $x$ . Denn bildet man, um dies zu zeigen, die Tangente desselben im Punkte  $x$ , so hat man, wenn mit  $z_i$  die laufenden Coordinaten der Tangente bezeichnet werden, nach [149] mit dem als Function der  $y_i$  zu betrachtenden Ausdruck  $\Delta_y^2(u_x)$  die Operation  $\Delta_z$  vorzunehmen und die Coordinaten des Berührungspunctes  $x$  statt der  $y_i$  zu setzen. Nun ist nach [2]

$$\frac{\partial}{\partial y_i}(\Delta_y^2(u_x)) = 2\Delta_y\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$$

und daher die Gleichung der gesuchten Tangente

$$z_1\Delta_x\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right) + z_2\Delta_x\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right) + z_3\Delta_x\left(\frac{\partial u}{\partial x_3}\right) = 0.$$

Aber da nach dem *Euler'schen* Satze [6]

$$\Delta_x \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = (n-1) \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

ist, so geht die Gleichung der Tangente des Kegelschnitts über in

$$z_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + z_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

und stellt daher [149] zugleich die Tangente an der Curve  $u = 0$  dar. Also berührt der Kegelschnitt  $\Delta_y^2(u_x) = 0$  die Curve  $u = 0$  in  $x$ . Wenn nun aber der Punct  $x$  zugleich auf der Hesse'schen Curve  $H(u) = 0$  liegt, so besteht [152] dieser Kegelschnitt aus zwei Geraden, und da er ausserdem die Curve  $u = 0$  berührt, so muss die eine Gerade die Tangente der Curve sein, also die Gleichung  $\Delta_y(u_x) = 0$  haben, und folglich muss  $\Delta_y(u_x)$  ein Factor von  $\Delta_y^2(u_x)$  sein. Demnach verschwinden diese Ausdrücke gleichzeitig, und die Gleichung (1) in [149] besitzt drei Wurzeln  $\lambda$  gleich Null, oder die Gerade  $xy$  trifft die Curve in drei zusammenfallenden Puncten, d. h., der Punct  $x$ , welcher der Annahme nach ein einfacher Curvenpunct ist, ist ein Wendepunct. (*Salmon*. H. pl. Cvs. pag. 71.)

**157.** Hieraus folgt nun: Die Wendepunkte einer Curve  $n$ . O.  $u = 0$ , welche keine Doppelpunkte besitzt, sind die Durchschnitte derselben mit der Hesse'schen Curve  $H(u) = 0$ .

**158.** Eine Curve  $n$ . O. welche keine Doppelpunkte hat, besitzt  $3n(n-2)$  Wendepunkte. — Denn die Hesse'sche Curve ist von der Ordnung  $3(n-2)$  [152], sie hat daher  $3n(n-2)$  Schnittpunkte mit der gegebenen Curve [138], und dies sind die Wendepunkte.

#### §. 4.

**159.** Ein Curvenpunct  $p$  heisst ein  $k$ -facher Punct, wenn beliebige durch ihn gelegte Geraden die Curve in  $k$  mit  $p$  zusammenfallenden Puncten schneiden. In diesem Falle gehen  $k$  Zweige der Curve durch den Punct  $p$ . Die  $k$  Tangenten an diesen haben daher  $k+1$  Puncte mit der Curve in  $p$  gemein, jede andere Gerade dagegen  $k$  Puncte.

**160.** Enthält die Gleichung einer Curve  $n$ . O. in homo-

genen Coordinaten  $x_1, x_2, x_3$  eine der letzteren, z. B.  $x_3$  nur in der  $(n - k)^{\text{ten}}$  Potenz und niedrigeren Potenzen, so ist die Ecke *III* ( $x_1 = 0, x_2 = 0$ ) des Fundamentaldreieckes ein  $k$ -facher Punct; und umgekehrt.

**Beweis.** Ordnet man die Gleichung der Curve nach Potenzen von  $x_3$ , so werden die Coefficienten homogene Functionen von  $x_1$  und  $x_2$ . Bezeichnet man eine solche, wenn sie vom Grade  $h$  ist, mit  $v_h$ , so heisst das Glied, welches  $x_3^r$  enthält,  $v_{n-r} x_3^r$ , weil alle Glieder von der  $n^{\text{ten}}$  Dimension sein müssen. Der Annahme nach ist daher die Gleichung der Curve von folgender Form:

$$v_k x_3^{n-k} + v_{k+1} x_3^{n-k-1} + \dots + v_n = 0.$$

Ist nun  $x_2 = \mu x_1$  die Gleichung einer beliebigen durch die Ecke *III* gehenden Geraden, so erhält man die Durchschnitte derselben mit der Curve, wenn man in die vorige Gleichung  $\mu x_1$  für  $x_2$  substituirt. Alsdann reducirt sich  $v_h$  auf die Form  $a_h x_1^h$ , wo  $a_h$  eine Constante ist. Daher wird dann die vorige Gleichung

$$a_k x_1^k x_3^{n-k} + a_{k+1} x_1^{k+1} x_3^{n-k-1} + \dots + a_n x_1^n = 0,$$

und diese giebt die  $n$  Werthe von  $\frac{x_1}{x_3}$  an, welche den  $n$  Durchschnitten der Curve mit der Geraden  $x_2 = \mu x_1$  zugehören. Dividirt man aber mit  $x_3^n$ , so erhält man

$$a_k \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^k + a_{k+1} \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^{k+1} + \dots + a_n \left(\frac{x_1}{x_3}\right)^n = 0,$$

und diese Gleichung hat  $k$  Wurzeln  $\frac{x_1}{x_3}$  gleich Null. In dem Punkte  $x_1 = 0, x_2 = 0$ , liegen also  $k$  Durchschnitte der Gerade  $x_2 = \mu x_1$  mit der Curve vereinigt. Da aber diese Gerade beliebig gewählt werden kann, so ist nach [159] die Ecke *III* ein  $k$ -facher Punct der Curve. — Das Umgekehrte ergibt sich unmittelbar, denn hätte die Gleichung eine andere Form, so wäre die Ecke *III* nach dem eben Bewiesenen ein mehrfacher Punct von anderer Ordnung als der  $k^{\text{ten}}$ . (*Salmon. H. pl. Cvs. pag. 30.*)

**161.** Wenn ein Punct als ein  $k$ -facher einer Curve  $n$ . O. gegeben ist, so zählt derselbe bei der Bestimmung der Curve durch Puncte für  $\frac{k(k+1)}{2}$  einfache Puncte.



Beweis. Legt man die Ecke *III* des Fundamentaldreieckes in den *k*-fachen Punct, so fehlen der Gleichung der Curve nach [160] die Glieder

$$v_0 x_3^n, v_1 x_3^{n-1}, \dots v_{k-1} x_3^{n-k+1},$$

welche  $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$  Coefficienten enthalten. Man braucht daher nach [140] zur Bestimmung der vorhandenen Coefficienten ausser der Ecke *III* nur noch  $\frac{n(n+3)}{2} - \frac{k(k+1)}{2}$  Puncte zu kennen, und ebenso viele würden noch erforderlich sein, wenn statt des *k*-fachen Punctes  $\frac{k(k+1)}{2}$  einfache Puncte gegeben wären. (*Salmon*. H. pl. Cvs. pag. 33.)

**162.** Hat eine Curve *n*. O. in der Ecke *III* ( $x_1=0, x_2=0$ ) des Fundamentaldreieckes einen *k*-fachen Punct, sodass ihre Gleichung nach [160] in der Form

$$(1) \quad v_k x_3^{n-k} + v_{k+1} x_3^{n-k-1} + \dots + v_n = 0$$

dargestellt werden kann, so drückt die Gleichung  $v_k = 0$  die *k* in dem *k*-fachen Puncte stattfindenden Tangenten aus.

Beweis.  $v_k = 0$  ist eine homogene Gleichung *k*<sup>ten</sup> Grades zwischen den Coordinaten  $x_1, x_2$ , daher enthält sie nur eine Variable,  $\frac{x_2}{x_1}$ , und lässt sich also in *k* lineare Factoren zerlegen. Sie stellt daher *k* Gerade dar, welche durch den Punct *III* hindurch gehen. Ist  $\frac{x_2}{x_1} = \frac{m}{n}$  eine der Wurzeln der Gleichung  $v_k = 0$ , so ist  $m x_1 - n x_2 = 0$  eine jener Geraden. Substituirt man nun in (1) den Werth  $x_2 = \frac{m}{n} x_1$ , so erhält man eine homogene Gleichung zwischen  $x_1$  und  $x_3$ , welche die Werthe von  $\frac{x_1}{x_3}$  liefert, die den *n* Durchschnitten der Geraden  $m x_1 - n x_2 = 0$  mit der Curve zugehören. Durch diese Substitution erhält  $v_k$  den Werth Null, weil  $m x_1 - n x_2$  einer der Factoren von  $v_k$  ist, jedes andere  $v_h$  aber reducirt sich auf die Form  $b_h x_1^h$ , wo  $b_h$  eine Constante ist. Man erhält daher

$$b_{k+1} x_1^{k+1} x_3^{n-k-1} + b_{k+2} x_1^{k+2} x_3^{n-k-2} + \dots + b_n x_1^n = 0,$$

und nach Division mit  $x_3^n$

$$b_{k+1} \left( \frac{x_1}{x_3} \right)^{k+1} + b_{k+2} \left( \frac{x_1}{x_3} \right)^{k+2} + \dots + b_n \left( \frac{x_1}{x_3} \right)^n = 0.$$

Diese Gleichung aber hat  $k+1$  Wurzeln  $\frac{x_1}{x_3}$  gleich Null, d. h., die Gerade  $mx_1 - nx_2 = 0$  schneidet die Curve im Punkte  $x_1 = 0, x_2 = 0$ , in  $k+1$  zusammenfallenden Punkten und ist daher [159] eine Tangente in diesem Punkte. (Salmon. H. pl. Cvs. pag. 30.)

**163.** Als specielle Fälle sind dabei hervorzuheben: Bei der Gleichung

$$ax_1x_3^{n-1} + v_2x_3^{n-2} + \dots + v_n = 0$$

berührt die Curve die Seite  $x_1 = 0$  in der Ecke III.

$$ax_1x_2x_3^{n-2} + v_3x_3^{n-3} + \dots + v_n = 0;$$

die Ecke III ist ein Doppelpunkt, und die Seiten  $x_1=0, x_2=0$  die Tangenten in dem Doppelpunkte.

$$ax_1^2x_3^{n-2} + v_3x_3^{n-3} + \dots + v_n = 0;$$

die Ecke III ist ein Rückkehrpunkt, und  $x_1 = 0$  die Rückkehrtangente.

### §. 5.

**164.** Hat eine Curve  $n$ . O.  $u = 0$  einen Doppelpunkt  $d$ , so hat ihre Hesse'schen Curve  $H(u) = 0$  in  $d$  ebenfalls einen Doppelpunkt, und beide Curven haben das Tangentenpaar in  $d$  gemeinschaftlich.

Beweis. Nimmt man die beiden Tangenten in  $d$  als zwei Seiten  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 0$  des Fundamentaldreieckes, so hat die Gleichung der Curve  $u = 0$  nach [163] folgende Form:

$$u = x_1x_2x_3^{n-2} + v_3x_3^{n-3} + \dots + v_n = 0.$$

Bei der Bildung von  $H(u)$  braucht man nun nur diejenigen Glieder zu berücksichtigen, welche in Beziehung auf  $x_1$  und  $x_2$  die niedrigste Dimension haben. Man erhält durch Differentiation

$$u_{11} = \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} x_3^{n-3} + \dots \quad u_{23} = (n-2)x_1x_3^{n-3} + \dots$$

$$u_{22} = \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} x_3^{n-3} + \dots \quad u_{31} = (n-2)x_2x_3^{n-3} + \dots$$

$$u_{33} = (n-2)(n-3)x_1x_2x_3^{n-4} + \dots \quad u_{12} = x_3^{n-2} + \dots$$

und hiermit

$$H(u) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} x_3^{n-3} + \dots & , & x_3^{n-2} + \dots & , & (n-2)x_2 x_3^{n-3} + \dots \\ x_3^{n-2} + \dots & , & \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} x_3^{n-3} + \dots & , & (n-2)x_1 x_3^{n-3} + \dots \\ (n-2)x_2 x_3^{n-3} + \dots & , & (n-2)x_1 x_3^{n-3} + \dots & , & (n-2)(n-3)x_1 x_2 x_3^{n-4} + \dots \end{vmatrix}.$$

Entwickelt man nun diese Determinante und berücksichtigt, dass  $\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2}$  und  $\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2}$  in Beziehung auf  $x_1$  und  $x_2$  von der ersten Dimension sind, so überzeugt man sich leicht, dass die meisten Glieder nicht unter die 3<sup>te</sup> Dimension in  $x_1$  und  $x_2$  herabsinken, und dass nur folgende die 2<sup>te</sup> enthalten:

$$(n-2)^2 x_1 x_2 x_3^{3n-8}, \quad -(n-2)(n-3) x_1 x_2 x_3^{3n-8}, \\ (n-2)^2 x_1 x_2 x_3^{3n-8}.$$

Die Summe dieser letzteren hat den Coefficienten

$$2(n-2)^2 - (n-2)(n-3) = (n-2)(2n-4-n+3) = (n-1)(n-2),$$

daher erhält die Gleichung der Hesse'schen Curve, wenn mit  $V_h$  ähnliche Ausdrücke bezeichnet werden, wie früher mit  $v_h$ , folgende Form

$$H(u) = (n-1)(n-2)x_1 x_2 x_3^{3n-8} + V_3 x_3^{3n-9} + \dots + V_{3n-6} = 0.$$

Diese ist von der Ordnung  $3n-6$ , enthält aber  $x_3$  höchstens in der Potenz  $3n-8$ , daher ist [160] die Ecke  $x_1=0, x_2=0$  ein Doppelpunkt, und das Tangentenpaar in diesem hat nach [162] die Gleichung

$$(n-1)(n-2)x_1 x_2 = 0,$$

besteht also aus den beiden Geraden  $x_1 = 0, x_2 = 0$ . (Salmon. H. pl. Cvs. pag. 73.)

**165.** Wenn eine Curve  $n$ . O.  $u=0$  einen Rückkehrpunkt  $r$  besitzt, so hat ihre Hesse'sche Curve  $H(u)=0$  in  $r$  einen dreifachen Punkt und zwar der Art, dass von den drei Tangenten desselben zwei mit der Rückkehrtangente der Curve  $u=0$  zusammenfallen.

Beweis. Legt man die Ecke III des Fundamentaldreieckes in  $r$  hinein und lässt die Seite  $x_1=0$  mit der Rückkehrtangente zusammenfallen, so heisst die Gleichung der Curve  $u=0$  nach [163]

$$u = x_1^2 x_3^{n-2} + v_3 x_3^{n-3} + \dots + v_n = 0.$$

Bildet man nun, wie in [164] die Determinante  $H(u)$ , indem man nur die Glieder hinschreibt, welche in  $x_1$  und  $x_2$  die niedrigste Dimension haben, so erhält man

$$H(u) = \begin{vmatrix} 2x_3^{n-2} + \dots & , & \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 \partial x_2} x_3^{n-3} + \dots & , & 2(n-2)x_1 x_3^{n-3} + \dots \\ \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 \partial x_2} x_3^{n-3} + \dots & , & \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} x_3^{n-3} + \dots & , & (n-3) \frac{\partial v_3}{\partial x_2} x_3^{n-4} + \dots \\ 2(n-2)x_1 x_3^{n-3} + \dots & , & (n-3) \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} x_3^{n-4} + \dots & , & (n-2)(n-3)x_1^2 x_3^{n-4} + \dots \end{vmatrix}.$$

Hierin sind  $\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1 \partial x_2}$  und  $\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2}$  in Beziehung auf  $x_1$  und  $x_2$  von der ersten,  $\frac{\partial v_3}{\partial x_2}$  aber von der zweiten Dimension, daher sinken die meisten Glieder der Determinante in  $x_1$  und  $x_2$  nicht unter die 4<sup>te</sup> Dimension hinab, und nur folgende sind von der 3<sup>ten</sup>:

$$2(n-2)(n-3)x_1^2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} x_3^{3n-9}, \quad -4(n-2)^2 x_1^2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} x_3^{3n-9},$$

bei welchen die Summe der Coefficienten gleich

$$\begin{aligned} 2(n-2)(n-3) - 4(n-2)^2 &= 2(n-2)(n-3-2n+4) \\ &= -2(n-1)(n-2) \end{aligned}$$

ist. Die Hesse'sche Curve erhält hiernach die Gleichung

$$\begin{aligned} H(u) &= -2(n-1)(n-2)x_1^2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} x_3^{3n-9} \\ &+ V_4 x_3^{3n-10} + \dots + V_{3n-6} = 0. \end{aligned}$$

Diese ist von der Ordnung  $3n-6$ , aber  $x_3$  kommt höchstens in der Potenz  $3n-9$  vor, daher [160] ist die Ecke  $r$  ein dreifacher Punkt, und [162] die drei Tangenten in diesem Punkte werden durch

$$x_1^2 \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} = 0$$

dargestellt, so dass zwei derselben mit der Rückkehrtangente  $x_1 = 0$  der Curve  $u = 0$  zusammenfallen, und die dritte die Gleichung  $\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} = 0$  hat. (Salmon. H. pl. Cvs. pag. 74.)

**166.** Bildet eine Gerade einen Theil einer Curve  $n$ . O.  $u = 0$ , so bildet sie auch einen Theil der Hesse'schen Curve  $H(u) = 0$ .

Beweis. Nimmt man die Gerade zu der Seite  $x_1 = 0$

des Fundamentaldreiecks, so kann man die linke Seite der Gleichung der Curve  $u = 0$  schreiben

$$u = x_1 v,$$

worin  $v$  eine Function  $(n - 1)$ . O. bedeutet. Dann ist

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = v + x_1 \frac{\partial v}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = x_1 \frac{\partial v}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = x_1 \frac{\partial v}{\partial x_3},$$

und es wird

$$H(u) = \begin{vmatrix} 2 \frac{\partial v}{\partial x_1} + x_1 v_{11}, & \frac{\partial v}{\partial x_2} + x_1 v_{12}, & \frac{\partial v}{\partial x_3} + x_1 v_{13} \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} + x_1 v_{12}, & x_1 v_{22}, & x_1 v_{23} \\ \frac{\partial v}{\partial x_3} + x_1 v_{13}, & x_1 v_{32}, & x_1 v_{33} \end{vmatrix}.$$

Zerlegt man diese Determinante nach den Elementen der letzten Columnne in zwei Summanden, so erhält man

$$H(u) = \begin{vmatrix} 2 \frac{\partial v}{\partial x_1} + x_1 v_{11}, & \frac{\partial v}{\partial x_2} + x_1 v_{12}, & \frac{\partial v}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} + x_1 v_{12}, & x_1 v_{22}, & 0 \\ \frac{\partial v}{\partial x_3} + x_1 v_{13}, & x_1 v_{32}, & 0 \end{vmatrix} \\ + \begin{vmatrix} 2 \frac{\partial v}{\partial x_1} + x_1 v_{11}, & \frac{\partial v}{\partial x_2} + x_1 v_{12}, & x_1 v_{13} \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} + x_1 v_{12}, & x_1 v_{22}, & x_1 v_{23} \\ \frac{\partial v}{\partial x_3} + x_1 v_{13}, & x_1 v_{32}, & x_1 v_{33} \end{vmatrix}.$$

Jetzt aber enthält jeder der beiden Summanden den Factor  $x_1$ , denn man erhält

$$H(u) = x_1 \left\{ \frac{\partial v}{\partial x_3} \begin{vmatrix} \frac{\partial v}{\partial x_2} + x_1 v_{12}, & v_{22} \\ \frac{\partial v}{\partial x_3} + x_1 v_{13}, & v_{32} \end{vmatrix} \right. \\ \left. + \begin{vmatrix} 2 \frac{\partial v}{\partial x_1} + x_1 v_{11}, & \frac{\partial v}{\partial x_2} + x_1 v_{12}, & v_{13} \\ \frac{\partial v}{\partial x_2} + x_1 v_{12}, & x_1 v_{22}, & v_{23} \\ \frac{\partial v}{\partial x_3} + x_1 v_{13}, & x_1 v_{32}, & v_{33} \end{vmatrix} \right\},$$

und daher bildet die Gerade  $x_1 = 0$  auch einen Theil der Hesse'schen Curve  $H(u) = 0$ .

**167.** Wenn eine einfache Curve  $n$ . O.  $\delta$  Doppelpunkte und  $\varrho$  Rückkehrpunkte besitzt, so ist die Anzahl ihrer Wendepunkte gleich

$$3n(n-2) - 6\delta - 8\varrho.$$

(*Plücker*. *Algebr. Curven*. pag. 208.)

**Beweis.** Wenn die Curve  $n$ . O.  $u = 0$  keine Doppelpunkte und Rückkehrpunkte hat, so sind [157] ihre Schnittpunkte mit der Hesse'schen Curve zugleich ihre Wendepunkte, und deren Anzahl ist dann  $3n(n-2)$  [158]. Kommen aber Doppelpunkte oder Rückkehrpunkte vor, so geht die Hesse'sche Curve auch durch diese [152], [153]; die Anzahl der Wendepunkte ist daher dann um so viel kleiner, als die Anzahl derjenigen Schnittpunkte der Curven  $u = 0$  und  $H(u) = 0$  beträgt, welche sich in den Doppelpunkten und Rückkehrpunkten befinden. Nun hat die Hesse'sche Curve nicht allein in jedem Doppelpunkte selbst einen Doppelpunkt, was vier Schnittpunkte geben würde, sondern beide Curven haben hier auch die Tangenten gemeinschaftlich [164], daher schneidet jeder Zweig der Hesse'schen Curve die Curve  $u = 0$  in drei Punkten, und folglich sind in jedem Doppelpunkte 6 Schnittpunkte vereinigt. In einem Rückkehrpunkte hat die Hesse'sche Curve einen dreifachen Punkt, und zwei Tangenten fallen mit der Rückkehrtangente zusammen [165], daher schneiden zwei Zweige der Hesse'schen Curve die Curve  $u = 0$  jeder in drei, und der dritte in zwei Punkten. Im Ganzen sind daher in jedem Rückkehrpunkte 8 Schnittpunkte vereinigt. Die ursprüngliche Anzahl der Wendepunkte wird daher für jeden Doppelpunkt um 6, und für jeden Rückkehrpunkt um 8 Einheiten vermindert. (*Salmon*. *H. pl. Cvs.* pag. 73.)

## §. 6.

**168.** Legt man durch einen festen Punkt  $x$  als Pol eine Transversale  $A$ , welche eine Curve  $n$ . O.  $u = 0$  in den Punkten  $z^{(1)}$ ,  $z^{(2)}$ , ...  $z^{(n)}$  schneidet, und ist  $y$  irgend ein anderer Punkt auf der Transversale  $A$ , so soll unter dem Zeichen

$$\sum \left( \frac{yz^{(h)}}{xz^{(h)}} \right)_r,$$

in welchem das Summenzeichen sich auf den oberen Index  $h$  bezieht, die Summe der Combinationen  $r^{ten}$  Classe, die aus den  $n$  Abschnittverhältnissen  $\frac{yz^{(h)}}{xz^{(h)}}$  gebildet werden können, verstanden werden. Setzt man nun  $yz^{(h)} = xz^{(h)} - xy$ , und stellt die Gleichung

$$(1) \quad \sum \left( \frac{yz^{(h)}}{xz^{(h)}} \right)_r = \sum \left( \frac{xz^{(h)} - xy}{xz^{(h)}} \right)_r = 0$$

auf, so ist diese in Beziehung auf den Abschnitt  $xy$  vom  $r^{ten}$  Grade, daher giebt es auf der Transversale  $r$  Punkte  $y$ , welche dieser Gleichung genügen. Jeder dieser Punkte heisst ein harmonisches Centrum vom Grade  $r$  für den Pol  $x$  und in Bezug auf die  $n$  Durchschnitte der Transversale  $A$  mit der Curve  $u = 0$ . (*Jonquières. Mémoire sur la théorie des poles et polaires. Lionville Journ. 2. Serie, Tome 2. 1857. pag. 266. Cremona, art. 11.*) Lässt man ferner die Transversale  $A$  sich um den Pol  $x$  drehen und denkt sich bei jeder Lage derselben die harmonischen Centren  $r^{ten}$  Grades bestimmt, so heisst der geometrische Ort derselben die  $(n - r)^{te}$  Polare des Poles  $x$  in Beziehung auf die Curve  $u = 0$ . (*Grassmann. Theorie der Centralen. Crelle's Journ. Bd. 24. pag. 276. Cremona art. 68.*)

**169.** Die  $(n - r)^{te}$  Polare eines Poles  $x$  bezüglich einer Curve  $n$ . O.  $u = 0$  ist eine Curve von der  $r^{ten}$  Ordnung, und ihre Gleichung lässt sich bei veränderlichen  $y_i$  in den Formen

$$\mathcal{A}_y^r(u_x) = 0 \quad \text{oder} \quad \mathcal{A}_x^{n-r}(u_y) = 0$$

darstellen.

**Beweis.** Da jeder der Punkte  $z$  mit den Punkten  $x, y$  auf der nämlichen Geraden  $A$  liegt, so kann man nach [19] setzen

$$z_i = x_i + \lambda y_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

und dann ist

$$(1) \quad \lambda = k \frac{xz}{yz},$$

worin  $k$  zwar einen willkürlichen Factor bedeutet, der aber für alle Punkte  $z$  den nämlichen Werth haben darf.

Substituirt man diese Coordinaten, da  $z$  auf der Curve  $u = 0$  liegt, in diese Gleichung, so erhält man nach [4]

$$u_x + \lambda \Delta_y(u_x) + \frac{\lambda^2}{2!} \Delta_y^2(u_x) + \dots \\ + \frac{\lambda^r}{r!} \Delta_y^r(u_x) + \dots + \frac{\lambda^n}{n!} \Delta_y^n(u_x) = 0$$

oder, indem man mit  $\lambda^n$  dividirt,

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^n u_x + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-1} \Delta_y(u_x) + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-2} \frac{\Delta_y^2(u_x)}{2!} + \dots \\ + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{n-r} \frac{\Delta_y^r(u_x)}{r!} + \dots + \frac{\Delta_y^n(u_x)}{n!} = 0. \quad (2)$$

Die  $n$  Wurzeln  $\lambda$  dieser Gleichung gehören den  $n$  Durchschnitten  $z$  der Transversale  $A$  mit der Curve an. Bezeichnet man denjenigen Werth von  $\lambda$ , welcher dem Punkte  $z^{(h)}$  entspricht, mit  $\lambda^{(h)}$ , so erhält man aus (1)

$$\frac{y z^{(h)}}{x z^{(h)}} = \frac{k}{\lambda^{(h)}},$$

und dadurch geht die Gleichung  $\sum \left(\frac{y z^{(h)}}{x z^{(h)}}\right)_r = 0$ , welcher die harmonischen Centren  $y$  bei jeder Lage der Transversalen  $A$  genügen müssen, über in

$$\sum \left(\frac{k}{\lambda^{(h)}}\right)_r = 0,$$

welche sich, da alle Glieder den Factor  $k^r$  enthalten, auf

$$\sum \left(\frac{1}{\lambda^{(h)}}\right)_r = 0$$

reducirt. Da aber hierin die  $n$  Werthe von  $\frac{1}{\lambda^{(h)}}$  die Wurzeln der Gleichung (2) sind, so folgt aus dieser, dass die Coordinaten der Punkte  $y$  der Gleichung

$$\Delta_y^r(u_x) = 0$$

genügen müssen. Dreht sich nun die Transversale um den Punkt  $x$ , so stellt die vorige Gleichung bei veränderlichen  $y$ , den geometrischen Ort der harmonischen Centren  $y$ , also die  $(n-r)^{\text{te}}$  Polare des Pols  $x$  dar. Nach [5] hat man identisch

$$\frac{\Delta_y^r(u_x)}{r!} = \frac{\Delta_x^{n-r}(u_y)}{(n-r)!},$$



daher kann die  $(n - r)^{\text{te}}$  Polare des Pols  $x$  auch durch  $\Delta_x^{n-r}(u_y) = 0$  dargestellt werden, welche, wie die vorige Gleichung, in Beziehung auf die veränderlichen  $y_i$  von der  $r^{\text{ten}}$  Ordnung ist. (*Salmon. H. pl. Cvs. pag. 55.*)

170. Die letzte Bemerkung zeigt, dass die Gleichungen

$$\Delta_y^r(u_x) = 0, \quad \Delta_x^{n-r}(u_y) = 0$$

nicht allein bei veränderlichen  $y_i$  die  $(n - r)^{\text{te}}$  Polare des Pols  $x$  darstellen, sondern dass dieselben Gleichungen bei veränderlichen  $x_i$  auch zugleich die  $r^{\text{te}}$  Polare des Pols  $y$  ausdrücken.

171. Unter den verschiedenen Polaren eines Pols  $x$  bezüglich einer Curve  $n$ . O.  $u=0$  sind besonders hervorzuheben: Die  $(n - 1)^{\text{te}}$  Polare, welche eine Gerade ist und daher die gerade Polare heisst. Ihre Gleichung ist bei veränderlichen  $y_i$

$$\Delta_y(u_x) = y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

Sodann die  $(n - 2)^{\text{te}}$  Polare, welche ein Kegelschnitt ist und daher die conische Polare heisst. Ihre Gleichung ist bei veränderlichen  $y_i$

$$\begin{aligned} \Delta_y^2(u_x) = & u_{11}y_1^2 + u_{22}y_2^2 + u_{33}y_3^2 + 2u_{23}y_2y_3 \\ & + 2u_{31}y_3y_1 + 2u_{12}y_1y_2 = 0. \end{aligned}$$

Ausserdem bemerke man, dass die Gleichung

$$\Delta_y(u_x) = 0$$

bei veränderlichen  $x_i$  zugleich die erste Polare des Pols  $y$  darstellt, welche eine Curve  $(n - 1)$  O. ist.

172. Liegen zwei Curven  $n$ . O. so, dass  $n$  Durchschnitte derselben auf einer Geraden  $A$ , und  $n$  Durchschnitte auf einer anderen Geraden  $B$  sich befinden, so ist die gerade Polare des Durchschnittspunctes  $x$  der Geraden  $A$  und  $B$  in Beziehung auf jede der beiden Curven eine und die nämliche Gerade.

Beweis. Die gerade Polare ist nach [168] der geometrische Ort des harmonischen Centrums ersten Grades für den Pol  $x$  und in Beziehung auf die  $n$  Durchschnitte einer durch  $x$  gehenden Transversale mit der Curve. Auf jeder dieser

Transversalen ist aber das harmonische Centrum ersten Grades ein einziger durch die  $n$  Durchschnitte und den Pol  $x$  vollkommen bestimmter Punkt; und, da die gerade Polare eine Gerade ist [171], so ist sie durch zwei Lagen der Transversale bestimmt, indem sie die diesen beiden Lagen zugehörigen harmonischen Centren verbindet. Wenn aber die Transversale mit einer der Geraden  $A$  oder  $B$  zusammenfällt, so sind ihre Durchschnitte mit der einen Curve die nämlichen wie mit der anderen Curve, daher sind auch auf jeder von beiden Geraden die harmonischen Centren in Bezug auf beide Curven dieselben, und also auch deren Verbindungslinie. (*Salmon. H. pl. Cvs. pag. 54.*)

173. Geht die  $(n - r)^{\text{te}}$  Polare eines Pols  $x$  in Bezug auf eine Curve  $n$ . O.  $u = 0$  durch einen Punkt  $y$ , so geht die  $r^{\text{te}}$  Polare des Pols  $y$  in Bezug auf dieselbe Curve  $n$ . O. durch den Punkt  $x$ .

Beweis. Bedeuten  $z_i$  veränderliche Coordinaten, so ist nach [170]

$$\Delta_{z^r}(u_x) = 0 \quad \text{die } (n - r)^{\text{te}} \text{ Polare von } x$$

$$\Delta_{z^{n-r}}(u_y) = 0 \quad \text{die } r^{\text{te}} \text{ Polare von } y.$$

Geht die erstere durch den Punkt  $y$ , so ist  $\Delta_{y^r}(u_x) = 0$ . Nach [5] aber ist identisch

$$\frac{\Delta_y^r(u_x)}{r!} = \frac{\Delta_x^{n-r}(u_y)}{(n-r)!};$$

wenn also  $\Delta_{y^r}(u_x)$  verschwindet, so verschwindet auch  $\Delta_{x^{n-r}}(u_y)$ , d. h., der Gleichung der  $r^{\text{ten}}$  Polare von  $y$  wird genügt, wenn man die  $x_i$  statt der  $z_i$  setzt, oder diese Polare geht durch  $x$  hindurch.

174. Die  $r^{\text{te}}$  Polare eines Pols  $x$  in Beziehung auf die  $s^{\text{te}}$  Polare desselben Pols bezüglich einer Curve  $n$ . O.  $u = 0$  ist zugleich die  $(r + s)^{\text{te}}$  Polare desselben Pols bezüglich der Curve  $u = 0$ .

Beweis. Bei veränderlichen  $y_i$  ist  $\Delta_{x^s}(u_y) = 0$  nach [170] die  $s^{\text{te}}$  Polare von  $x$  bezüglich  $u$ . In Bezug auf diese hat die  $r^{\text{te}}$  Polare von  $x$  die Gleichung

$$\Delta_{x^r}(\Delta_{x^s}(u_y)) = 0.$$

Nach [3] aber ist diese Gleichung identisch mit der folgenden

$$\Delta_{x^{r+s}}(u_y) = 0,$$

welche die  $(r + s)^{\text{te}}$  Polare von  $x$  darstellt.

175. Die  $r^{\text{te}}$  Polare eines Pols  $x$  in Bezug auf die  $s^{\text{te}}$  Polare eines Pols  $x'$  bezüglich einer Curve  $n$ . O.  $u = 0$  ist identisch mit der  $s^{\text{te}}$  Polare von  $x'$  in Bezug auf die  $r^{\text{te}}$  Polare von  $x$  bezüglich der Curve  $u = 0$ . — Denn bei veränderlichen  $y_i$  wird die erstere durch  $\Delta_{x'}(\Delta_{x^s}(u_y)) = 0$ , die letztere durch  $\Delta_{x^s}(\Delta_{x^r}(u_y)) = 0$  dargestellt. Nach [3] aber sind diese beiden Gleichungen identisch.

176. Die gerade Polare eines Puncts  $x$ , der auf der Curve  $n$ . O.  $u = 0$  liegt, auf welche die Polare sich bezieht, ist die Tangente an dieser Curve im Puncte  $x$ . — Denn die Gleichung der geraden Polare von  $x$ , welche nach [171] lautet:

$$(1) \quad y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0,$$

stellt, wenn  $x$  auf der Curve  $u$  liegt, nach [149] zugleich die Tangente an  $u$  in  $x$  dar. (Salmon, H. pl. Cvs. pag. 59.)

Ist aber  $x$  ein Doppel- oder Rückkehrpunct der Curve  $u$ , so ist seine gerade Polare bezüglich  $u$  ganz unbestimmt. — Denn für einen solchen Punct  $x$  ist nach [150] und [153]  $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$  und daher die Gleichung (1) für alle Werthe der  $y_i$  erfüllt.

177. Liegt ein Punct  $x$  auf einer Curve  $n$ . O.,  $u = 0$ , so gehen die Polaren aller Ordnungen dieses Puncts bezüglich derselben Curve durch den Punct  $x$  und berühren die Curve in diesem Puncte.

Beweis. Die  $r^{\text{te}}$  Polare von  $x$  hat [170] bei veränderlichen  $y_i$  die Gleichung

$$\Delta_{x^r}(u_y) = 0.$$

Setzt man in dem linken Theile  $x$  statt  $y$ , so ist [6]

$$\Delta_{x^r}(u_x) = n(n-1) \dots (n-r+1) u_x,$$

und dies verschwindet, weil  $x$  auf der Curve  $u$  liegt; daher geht die Polare durch  $x$  hindurch. Um ferner die Tangente an der Polare in  $x$  zu bestimmen, hat man nach [149], wenn die laufenden Coordinaten der Tangente mit  $z_i$  bezeichnet werden, mit dem als Function der  $y_i$  zu betrachtenden Aus-

druck  $\Delta_x^r(u_y)$  die Operation  $\Delta_x$  vorzunehmen, und dann  $x$  statt  $y$  zu setzen. Nun ist [2]

$$\frac{\partial}{\partial y_i} (\Delta_x^r(u_y)) = \Delta_x^r \left( \frac{\partial u}{\partial y_i} \right)$$

und daher die Gleichung der Tangente in  $x$  an der Polare

$$z_1 \Delta_x^r \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) + z_2 \Delta_x^r \left( \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) + z_3 \Delta_x^r \left( \frac{\partial u}{\partial x_3} \right) = 0.$$

Da die Functionen  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  aber homogen vom Grade  $n-1$  sind, so ist [6]

$$\Delta_x^r \left( \frac{\partial u}{\partial x_i} \right) = (n-1)(n-2) \dots (n-r) \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

und dadurch verwandelt sich die vorige Gleichung mit Unterdrückung des constanten Factors in

$$z_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + z_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + z_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

Dieses aber ist [149] zugleich die Gleichung der Tangente in  $x$  an der Curve  $u=0$ , und daher haben diese und die Polare in  $x$  eine gemeinschaftliche Tangente.

178. Geht die Polare irgend einer Ordnung eines Puncts  $x$  in Bezug auf eine Curve  $n$ . O.  $u=0$  durch diesen Punct  $x$  hindurch, so liegt  $x$  auf der Curve  $u=0$ .

Beweis. In diesem Falle wird die Gleichung der  $r^{\text{ten}}$  Polare  $\Delta_x^r(u_y)=0$  erfüllt, wenn man  $x$  statt  $y$  setzt; es ist also  $\Delta_x^r(u_x)=0$ ; aber da [6]  $\Delta_x^r(u_x)=n(n-1)\dots(n-r+1)u_x$  ist, so ist dann auch  $u_x=0$ , d. h.,  $x$  liegt auf  $u$ .

179. Hat eine Curve  $n$ . O.  $u=0$  einen Doppelpunct  $x$ , so gehen die ersten Polaren (von der Ordnung  $n-1$ ) aller Punkte der Ebene durch ihn hindurch.

Beweis. Die Gleichung der ersten Polare eines Pols  $y$  kann bei veränderlichen  $x_i$  nach [171] in der Form

$$y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

geschrieben werden. Ist aber  $x$  ein Doppelpunct, so ist [150]

$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_2} = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$ , daher wird die vorige Gleichung für diesen Punct erfüllt, wo auch  $y$  liegen mag.

180. Hat die Curve  $n$ . O.  $u=0$  einen Rückkehrpunct, so gehen die ersten Polaren (von der Ordnung  $n-1$ ) aller

Punkte der Ebene durch ihn hindurch und berühren in ihm die Rückkehrtangente.

Beweis. Legt man die Ecke  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  des Fundamentaldreiecks in den Rückkehrpunkt und die Seite  $x_1 = 0$  in die Rückkehrtangente, so kann [163] die Gleichung der Curve in der Form

$$u = x_1^2 x_3^{n-2} + v_3 x_3^{n-3} + \dots + v_n = 0$$

geschrieben werden. Daraus folgt

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 2x_1 x_3^{n-2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_1} x_3^{n-3} + \dots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial v_3}{\partial x_2} x_3^{n-3} + \dots$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_3} = (n-2)x_1^2 x_3^{n-3} + \dots$$

Multiplicirt man diese Ausdrücke mit  $y_1$ ,  $y_2$ ,  $y_3$  und addirt, so erhält [171] die Gleichung der ersten Polare des Pols  $y$  bei veränderlichen  $x_i$  die Form

$$2y_1 x_1 x_3^{n-2} + V_2 x_3^{n-3} + \dots + V_n = 0.$$

Nach [163] geht daher diese Polare, wo auch  $y$  liegen mag, durch die Ecke  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  und berührt die Seite  $x_1 = 0$ . (Salmon, H. pl. Cvs. pag. 60.)

181. Die conische Polare eines Doppelpuncts  $x$  ist das Tangentenpaar in diesem. Denn die Gleichung der conischen Polare eines Puncts  $x$  bei veränderlichen  $y_i$ , nämlich  $\mathcal{A}_y^2(u_x) = 0$  [171], stellt, wenn  $x$  ein Doppelpunct ist, nach [151] zugleich das Tangentenpaar in diesem dar.

182. Legt man aus einem Punkte  $y$  Tangenten an eine Curve  $n$ . O.  $u = 0$ , so geht die erste Polare des Puncts  $y$  durch die Berührungspunkte.

Beweis. Ist  $x$  einer der Berührungspunkte, so ist [176] die Tangente in diesem Punkte die gerade Polare von  $x$  in Bezug auf  $u$ . Da diese durch  $y$  geht, so geht [173] die erste Polare von  $y$  durch  $x$ . Und umgekehrt gilt:

183. Ist  $x$  ein Schnittpunkt der Curve  $u = 0$  mit der ersten Polare eines Puncts  $y$ , und nicht zugleich ein Doppel- oder Rückkehrpunkt der Curve  $u = 0$ , so geht die Tangente in  $x$  an der Letzteren durch  $y$ . Ist aber  $x$  ein Doppel- oder Rückkehrpunkt der Curve  $u = 0$ , so geht zwar

die erste Polare von  $y$  nach [179] und [180] auch durch  $x$ , aber die gerade Polare von  $x$  ist dann [176] ganz unbestimmt und fällt nicht mit einer der Tangenten in  $x$  zusammen. Hieraus folgt:

184. Wenn eine Curve  $u = 0$  keine Doppel- oder Rückkehrpunkte besitzt, so sind die Durchschnitte der ersten Polare eines Puncts  $y$  mit der Curve  $u = 0$  zugleich die Berührungspunkte aller aus  $y$  an die Curve  $u = 0$  gehenden Tangenten.

185. An eine Curve  $n$ . O.  $u = 0$ , welche keine Doppel- oder Rückkehrpunkte besitzt, können aus einem beliebigen Puncte  $y$  der Ebene  $n(n-1)$  Tangenten an die Curve gelegt werden. — Denn da die erste Polare jedes Punctes  $y$  eine Curve  $(n-1)$ . O. ist, so schneidet sie die Curve  $u = 0$  in  $n(n-1)$  Puncten [138].

186. Die Zahl, welche angiebt, wieviel Tangenten aus einem beliebigen Puncte an eine Curve gehen, heisst die Classe der Curve; daher ist eine Curve  $n^{\text{ter}}$  Ordnung ohne Doppel- und Rückkehrpunkte von der  $n(n-1)^{\text{ten}}$  Classe.

187. Liegt der Punct  $y$  auf der Curve  $u$  selbst, so berührt seine erste Polare die erstere in  $y$  [177]; es fallen also zwei Durchschnitte beider Curven in  $y$  hinein. Man sieht daher die in  $y$  stattfindende Tangente an der Curve  $u$  als aus zwei zusammenfallenden Tangenten bestehend an. Diese Ansicht ist um so mehr gerechtfertigt, als man eine Curve nicht allein als den geometrischen Ort eines veränderlichen Puncts betrachten kann, sondern auch als die Einhüllende einer veränderlichen Geraden. Alsdann tritt ein Punct der Curve als der Durchschnitt zweier unendlich naher oder zusammenfallender Tangenten auf.\*) Demnach:

---

\*) Wenn in einer Gleichung des  $n^{\text{ten}}$  Grades die Variabeln nicht als Punct-, sondern als Liniencoordinaten aufgefasst werden, so stellt die Gleichung eine Curve dar, welche als Einhüllende einer Geraden auftritt und von der  $n^{\text{ten}}$  Classe ist. Dann folgt ähnlich wie in [138], dass zwei Curven resp. von der  $m^{\text{ten}}$  und  $n^{\text{ten}}$  Classe, welche nicht irgend einen Theil mit einander gemein haben,  $mn$  gemeinschaftliche Tangenten besitzen. Analoge Betrachtungen, wie die in [149] ff. angestellten, zeigen ferner, dass an die Stelle der Doppelpunkte Doppeltangenten treten, und an die Stelle der Rückkehrpunkte Wendetangenten, sodass

Aus einem Punkte  $y$ , welcher auf einer Curve  $n$ . O. ohne Doppel- oder Rückkehrpunkte liegt, gehen ausser der in  $y$  stattfindenden Tangente noch  $n(n-1)-2$  Tangenten an die Curve.

188. Besitzt eine Curve  $n$ . O.  $\delta$  Doppelpunkte und  $\rho$  Rückkehrpunkte, so ist ihre Classe gleich

$$n(n-1)-2\delta-3\rho.$$

(Plücker. Algebr. Curven pag. 208.)

Beweis. Da die erste Polare eines Puncts  $y$  durch sämtliche Doppel- [179] und Rückkehrpunkte [180] geht, ohne dass die Tangenten in diesen Puncten durch  $y$  gehen [183], so wird die ursprüngliche Classe  $n(n-1)$  der Curve um so viel vermindert, als die Anzahl derjenigen Schnittpunkte beider Curven beträgt, welche sich in den Doppel- und Rückkehrpunkten befinden. In jedem Doppelpunkte aber trifft die Polare die Curve zwei mal, und da in jedem Rückkehrpunkte die Polare zugleich die Rückkehrtangente berührt, so hat sie in einem solchen drei Puncte mit der Curve gemein. Die ursprüngliche Classe wird daher für jeden Doppelpunkt um zwei und für jeden Rückkehrpunkt um drei Einheiten vermindert.

189. Wenn ein Punct  $x$  auf der Hesse'schen Curve einer Curve  $n$ . O.  $u=0$  liegt, so besteht seine conische Polare allemal aus zwei Geraden, und dies findet auch nur dann statt, wenn  $x$  auf der Hesse'schen Curve liegt.

Beweis. In veränderlichen  $y_i$  heisst die Gleichung der conischen Polare von  $x$  nach [171]  $\mathcal{A}_y^2(u_x)=0$ . Dieser Kegelschnitt zerfällt aber nach [152] und [84] dann und nur dann in zwei Gerade, wenn die  $x_i$  der Gleichung  $H(u)=0$  genügen, d. h. wenn  $x$  auf der Hesse'schen Curve liegt.

190. Hat die erste Polare eines Punctes  $y$  bezüglich

---

letztere bei einer als einer Einhüllenden einer Geraden betrachteten Curve eine specielle Art von Doppeltangenten bilden. •An die Stelle eines Wendepunctes endlich tritt eine Rückkehrtangente, sodass der Rückkehrpunkt als ein Curvenpunct auftritt, durch welchen drei zusammenfallende Tangenten gehen, die die Curve in dem Rückkehrpunkte berühren. Eine Curve  $n$ ter Classe ist im Allgemeinen von der Ordnung  $n(n-1)$  und besitzt dann weder Doppel- noch Wendetangenten, dagegen  $3n(n-2)$  Rückkehrtangenten.

einer Curve  $n$ . O.  $u = 0$  einen Doppelpunkt, so geht die Hesse'sche Curve  $H(u) = 0$  durch diesen hindurch. Und umgekehrt: Jeder Punkt der Hesse'schen Curve ist zugleich für irgend eine erste Polare ein Doppelpunkt.

Beweis. In veränderlichen  $x_i$  ist die Gleichung der ersten Polare eines Puncts  $y$  nach [171]

$$P = y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

Ist nun  $x$  ein Doppelpunkt dieser Curve, so gelten nach [150] die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x_1} &= u_{11} y_1 + u_{21} y_2 + u_{31} y_3 = 0 \\ (1) \quad \frac{\partial P}{\partial x_2} &= u_{12} y_1 + u_{22} y_2 + u_{32} y_3 = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial x_3} &= u_{13} y_1 + u_{23} y_2 + u_{33} y_3 = 0, \end{aligned}$$

und diese können nur mit einander bestehen, wenn  $H(u) = 0$  ist, d. h. wenn  $x$  auf der Hesse'schen Curve liegt. — Ist umgekehrt  $x$  ein Punct der Hesse'schen Curve, so giebt es allemal einen Punct  $y$ , für den gleichzeitig die Gleichungen (1) bestehen, für dessen erste Polare also  $x$  ein Doppelpunkt ist.

**191.** Die beiden vorigen Sätze lassen sich in folgenden zusammenfassen: Die Hesse'sche Curve einer Curve  $u = 0$  ist sowohl der geometrische Ort der Puncte, deren conische Polaren aus zwei Geraden bestehen, als auch der geometrische Ort für die Doppelpuncte der ersten Polaren bezüglich der Curve  $u = 0$ .

**192.** Eine beliebige Gerade  $G$  hat bezüglich einer Curve  $n$ . O.,  $u = 0$ ,  $(n - 1)^2$  Pole, d. h. es giebt  $(n - 1)^2$  Puncte, welche bezüglich der Curve  $u = 0$  die Gerade  $G$  zur geraden Polare haben.

Beweis. Seien  $x$  und  $x'$  zwei Puncte der Geraden  $G$ ,  $P$  und  $P'$  ihre ersten Polaren bezüglich  $u$ . Diese beiden Curven schneiden sich in  $(n - 1)^2$  Puncten  $y$ . Da nun jeder Punct  $y$  sowohl auf  $P$  als auch auf  $P'$  liegt, so geht die gerade Polare jedes  $y$  sowohl durch  $x$ , als auch durch  $x'$  [173] und fällt daher mit der Geraden  $G$  zusammen. (*Salmon*, H. pl. Cvs. pag. 59.)



**193.** Die ersten Polaren aller Punkte  $x$ , welche auf einer beliebigen Geraden  $G$  liegen, schneiden sich in den nämlichen  $(n-1)^2$  Punkten und bilden also einen Curvenbüschel  $(n-1)$ . O. [145], dessen Basispunkte die  $(n-1)^2$  Pole der Geraden  $G$  sind.

Beweis. Ist  $y$  einer der  $(n-1)^2$  Pole von  $G$ , so geht die gerade Polare von  $y$ , nämlich  $G$ , durch  $x$  und daher [173] die erste Polare von  $x$  durch  $y$ . (*Cremona*, *Curve plane* art. 77. *Bobillier*, *Démonstrations de quelques théorèmes sur les lignes etc.* — *Annales de Gergonne* t. 18. 1827–28. pag. 97.)

**194.** Die Polaren derselben, der  $r^{\text{ten}}$ , Ordnung (die  $(n-r)^{\text{ten}}$  Polaren) eines Punktes  $a$  in Bezug auf sämtliche Curven eines Büschels  $n^{\text{ter}}$  O. bilden selbst einen Curvenbüschel  $r^{\text{ter}}$  O.

Beweis. Sind  $u = 0$ ,  $v = 0$  zwei Curven des Büschels, so kann jede Curve desselben durch die Gleichung  $u + \lambda v = 0$  dargestellt werden [145]. Die  $(n-r)^{\text{te}}$  Polare eines Punktes  $a$  in Beziehung auf diese Curve hat dann [170] die Gleichung

$$\Delta_{x^r}(u_a) + \lambda \Delta_{x^r}(v_a) = 0$$

und stellt daher für verschiedene Werthe von  $\lambda$  einen Curvenbüschel  $r^{\text{ter}}$  Ordnung dar. (*Salmon* H. pl. Cvs. pag. 156).

Zusatz. Für  $r = 1$  folgt hieraus: Die geraden Polaren eines Punktes in Beziehung auf die Curven eines Büschels schneiden sich in einem und demselben Punkte.

## §. 7.

**195.** Sind  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$  die Gleichungen dreier Curven  $n$ . O., welche nicht durch die nämlichen  $n^2$  Punkte gehen, so heisst das System der Curven, welche durch die Gleichung

$$(1) \quad u + \lambda v + \mu w = 0,$$

worin  $\lambda$ ,  $\mu$  zwei willkürliche Constanten bedeuten, dargestellt werden können, ein Curvennetz  $n$ . O., und  $u$ ,  $v$ ,  $w$  die Leitcurven des Netzes.

**196.** Man kann unter den Curven eines Netzes drei beliebige, die nicht durch die nämlichen  $n^2$  Punkte gehen, heraus greifen und als Leitcurven annehmen, das Netz bleibt dadurch ungeändert.

Beweis. Sind  $\alpha, \beta; \alpha', \beta'; \alpha'', \beta''$  irgend drei Werthe-paare von  $\lambda, \mu$ , so sind

$$u + \alpha v + \beta w = 0, u + \alpha' v + \beta' w = 0, u + \alpha'' v + \beta'' w = 0$$

irgend drei Curven des Netzes (1). Nimmt man diese zu Leitcurven eines Netzes, so hat irgend eine Curve desselben die Gleichung

$$u + \alpha v + \beta w + \lambda(u + \alpha' v + \beta' w) + \mu(u + \alpha'' v + \beta'' w) = 0;$$

da sich diese aber in der Form

$$(1 + \lambda + \mu)u + (\alpha + \lambda\alpha' + \mu\alpha'')v + (\beta + \lambda\beta' + \mu\beta'')w = 0$$

schreiben lässt, so ist die durch sie dargestellte Curve auch eine Curve des Netzes (1).

197. Alle Curven eines Netzes  $n$ . O., welche durch einen und denselben Punct gehen, bilden einen Curvenbüschel  $n$ . O., d. h. sie schneiden sich in den nämlichen  $n^2$  Puncten. Haben aber die drei Leitcurven einen Punct mit einander gemein, so gehen durch diesen alle Curven des Netzes hindurch.

Beweis. Wenn die drei Leitcurven einen Punct mit einander gemein haben, so wird die Gleichung (1) in [195] für diesen Punct erfüllt, welche Werthe auch  $\lambda, \mu$  haben mögen, daher gehen alle Curven des Netzes durch diesen Punct hindurch. Ist aber  $p$  irgend ein anderer Punct, und sind  $u', v', w'$  die Werthe, welche die Functionen  $u, v, w$  in  $p$  annehmen, so gilt für die Curven, welche durch  $p$  gehen, die Gleichung

$$(2) \quad u' + \lambda v' + \mu w' = 0.$$

Eliminirt man aus dieser und aus (1) eine der beiden willkürlichen Constanten, z. B.  $\lambda$ , so erhält man für alle durch  $p$  gehenden Curven des Netzes die Gleichung

$$v'u - u'v + \mu(v'w - w'v) = 0.$$

Allé diese Curven gehen daher durch die  $n^2$  Durchschnitte der beiden  $v'u - u'v = 0$  und  $v'w - w'v = 0$  hindurch. Liegt  $p$  in einem Durchschnitte zweier Leitcurven, z. B.  $u$  und  $v$ , während  $w$  nicht durch  $p$  geht, so sind  $u'$  und  $v'$  Null,  $w'$  aber von Null verschieden. Dann zeigt die Gleichung (2), dass für alle durch diesen Punct  $p$  gehenden Curven  $\mu = 0$

sein muss, sodass diese Curven durch die Gleichung  $u + \lambda v = 0$  dargestellt werden und ebenfalls einen Büschel bilden.

198. Durch zwei gegebene Punkte geht im Allgemeinen nur eine einzige Curve eines Netzes: in dem Falle aber, dass die beiden Punkte zwei Basispunkte eines in dem Netze enthaltenen Curvenbüschels sind, gehen alle Curven dieses Büschels durch die beiden gegebenen Punkte. Gehören endlich beide allen drei Leitcurven an, so folgt aus [197], dass alle Curven des Netzes durch sie hindurch gehen.

Beweis. Sind  $u', v', n'$  und  $u'', v'', n''$  die Werthe, welche die Functionen  $u, v, n$  in den beiden gegebenen Punkten annehmen, so müssen für die Curven, welche durch beide Punkte gehen, die Gleichungen

$$u' + \lambda v' + \mu n' = 0$$

$$u'' + \lambda v'' + \mu n'' = 0$$

stattfinden. Durch diese erhalten aber  $\lambda$  und  $\mu$  vollkommen bestimmte Werthe, sodass auch die durch die beiden Punkte gehende Curve des Netzes vollkommen bestimmt ist. Eine Ausnahme tritt nur ein, wenn die beiden letzten Gleichungen von einander abhängig sind, d. h. wenn der Fall eintritt, dass, nachdem  $\lambda$  aus der ersten Gleichung bestimmt ist, die Werthe  $u'', v'', n''$  der zweiten Gleichung für jeden Werth von  $\mu$  genügen, wenn also die beiden gegebenen Punkte Basispunkte eines Curvenbüschels sind.

199. Die sämtlichen ersten Polaren (von der Ordnung  $n-1$ ) aller Punkte der Ebene in Bezug auf eine und dieselbe Curve  $n$ . O.  $u = 0$  bilden ein Curvennetz  $(n-1)$ . O.

Beweis. Die erste Polare eines Punkts  $y$  hat bei veränderlichen  $x_i$  nach [171] die Gleichung

$$y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0.$$

Lässt man den Punkt  $y$  alle Lagen in der Ebene annehmen, so werden  $y_1, y_2, y_3$  willkürliche Grössen, während die Gleichungen  $\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$  drei Curven  $(n-1)$ . O. (nämlich die ersten Polaren der Ecken des Fundamentaldreiecks) darstellen. Die vorige Gleichung hat daher die Form der Gleichung (1) in [195].

## Fünfter Abschnitt.

Hilfssätze über eine von Steiner aufgestellte  
Verwandtschaft.\*)

## §. 1.

200. Hat man einen Kegelschnittbüschel mit den Basispunkten  $a b c d$ , und bestimmt man für einen beliebigen Punkt  $m$  die Polaren in Beziehung auf alle Kegelschnitte des Büschels, so schneiden sich diese im Allgemeinen in einem bestimmten Punkte  $m'$ , dem zu  $m$  in Beziehung auf den Kegelschnittbüschel conjugirten Pole [111]. Eine Ausnahme hiervon findet nur dann statt, wenn  $m$  zusammenfällt mit einer der drei Ecken  $p q r$  des Dreieckes, welches dem vollständigen Viereck  $a b c d$  als Diagonaldreieck angehört; denn dann fallen alle Polaren mit der gegenüberliegenden Seite des Diagonaldreieckes zusammen [107]. Wenn man daher in der Ebene jedem Punkte  $m$  den ihm in Beziehung auf den Kegelschnittbüschel conjugirten Pol  $m'$  entsprechen lässt, so erhält man eine Verwandtschaft zweier Punctsysteme, bei welcher jedem Punkte eines Systemes im Allgemeinen ein bestimmter Punkt des anderen Systemes entspricht, bei welcher jedoch einer Ecke  $p$  des Diagonaldreieckes alle Punkte der gegenüberliegenden Seite  $qr$  entsprechen. Da zwischen zwei conjugirten Polen in Beziehung auf einen Kegelschnittbüschel Gegenseitigkeit stattfindet, so ist diese Verwandtschaft involutorisch, indem je zwei Punkte der beiden Systeme einander involutorisch entsprechen [41]. Fällt  $m$  auf einen der Basispunkte des Büschels z. B. auf  $a$ , so fällt auf diesen auch der entsprechende Punkt  $m'$ , denn da die Polaren von  $a$  die Tangenten in  $a$  an den Kegelschnitten des Büschels sind [99], so ist  $a$  ihr gemeinschaftlicher Schnittpunkt. Eine derartige Verwandtschaft zweier Punctsysteme soll kurz eine Steiner'sche Verwandtschaft genannt werden. Eine solche be-

\*) *Steiner*. Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander. Berlin 1832. pag. 254 ff. — *Schröter*. Steiner's Vorlesungen. Leipzig 1867. pag. 316.

zieht sich stets auf einen bestimmten Kegelschnittbüschel, welcher durch seine vier Basispunkte  $a b c d$  bestimmt ist. Daher sollen diese vier Punkte die Basis der Steiner'schen Verwandtschaft genannt werden. Die Ecken des dem vollständigen Viereck  $a b c d$  zugehörigen Diagonaldreiecks  $p q r$  aber mögen die Hauptpunkte der Steiner'schen Verwandtschaft heissen.

**201. Aufgabe.** Wenn vier Punkte  $a b c d$  als Basis einer Steiner'schen Verwandtschaft gegeben sind, zu einem gegebenen Punkte  $m$  den ihm in dieser Verwandtschaft entsprechenden Punkt  $m'$  zu construiren.

**Auflösung.** Man sucht die Ecken  $p q r$  des Diagonaldreiecks und verbindet diese mit dem gegebenen Punkte  $m$ . Alsdann bestimmt man zu jeder dieser Verbindungslinien den zugeordneten harmonischen Strahl in Bezug auf diejenigen zwei Seiten des vollständigen Vierecks  $a b c d$ , welche in der betreffenden Diagonalecke zusammenstossen. Diese drei Strahlen schneiden sich in dem gesuchten Punkte  $m'$ . (Man braucht daher nur zwei von ihnen zu construiren). — Denn die erwähnten drei harmonischen Strahlen sind die Polaren des Punkts  $m$  in Beziehung auf die aus Geradenpaaren bestehenden Kegelschnitte des Büschels, welche von je zwei gegenüberliegenden Seiten des vollständigen Vierecks  $a b c d$  gebildet werden [95].

**Bemerkung.** Sind nicht die Ecken  $a b c d$  des Vierecks, sondern nur die des Dreiecks  $p q r$  gegeben, so kann man unendlich viele vollständige Vierecke finden, für welche  $p q r$  das Diagonaldreieck ist, indem man eine Ecke des Vierecks willkürlich annehmen kann [83]. In diesem Falle kann man daher auch auf unendlich viele Arten eine Steiner'sche Verwandtschaft etabliren, indem jedes jener Vierecke  $a b c d$  als Basis einer solchen Verwandtschaft dienen kann.

**202.** Wenn ein Punkt  $x$  eine Gerade

$$(1) \quad m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0$$

durchläuft, so beschreibt der ihm in einer Steiner'schen Verwandtschaft entsprechende Punkt  $y$  einen Kegelschnitt, der durch die Ecken des Diagonaldreiecks  $p q r$  geht, welches

dem die Basis der Verwandtschaft bildenden Vierecke  $abcd$  angehört.

Beweis. Das Diagonaldreieck  $pqr$  ist nach [108] allen Kegelschnitten des Büschels  $[abcd]$  conjugirt. Nimmt man es als Fundamentaldreieck an, so werden irgend zwei Kegelschnitte dieses Büschels nach [109] durch die Gleichungen

$$a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2 = 0 \quad b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + b_3 x_3^2 = 0$$

dargestellt. Die Polaren des Puncts  $x$  in Bezug auf diese beiden Kegelschnitte haben dann nach [95] in veränderlichen  $y_i$  die Gleichungen

$$(2) \quad \begin{aligned} a_1 y_1 x_1 + a_2 y_2 x_2 + a_3 y_3 x_3 &= 0, \\ b_1 y_1 x_1 + b_2 y_2 x_2 + b_3 y_3 x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Da nun der dem  $x$  entsprechende Punct  $y$  nach [200] der Durchschnitt dieser beiden Polaren ist, so liefern diese beiden Gleichungen die Coordinaten des Puncts  $y$ ; und eliminirt man die  $x_i$  aus ihnen mit Hülfe der Gleichung (1), so erhält man den geometrischen Ort von  $y$ , während  $x$  die Gerade (1) durchläuft. Diese Elimination giebt

$$\begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ a_1 y_1 & a_2 y_2 & a_3 y_3 \\ b_1 y_1 & b_2 y_2 & b_3 y_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder wenn man der Kürze wegen

$$a_2 b_3 - a_3 b_2 = A_1, \quad a_3 b_1 - a_1 b_3 = A_2, \quad a_1 b_2 - a_2 b_1 = A_3$$

setzt,

$$(3) \quad m_1 A_1 y_2 y_3 + m_2 A_2 y_3 y_1 + m_3 A_3 y_1 y_2 = 0.$$

Der gesuchte geometrische Ort ist daher [102] ein dem Fundamentaldreieck umschriebener Kegelschnitt.

Zusatz. Geht die Gerade (1) durch eine Ecke des Hauptdreiecks  $pqr$  z. B. durch die, in welcher die Seiten  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  zusammenstossen, so ist  $m_3 = 0$  [77]. Der Kegelschnitt (3) erhält dann die Gleichung

$$y_3 (m_2 A_2 y_1 + m_1 A_1 y_2) = 0$$

und besteht daher aus der der betreffenden Ecke gegenüberliegenden Seite des Dreiecks  $pqr$  und einer Geraden, welche durch diese Ecke geht. Sieht man daher von der Diagonalseite ab, welche ohnehin nach [200] eine Ausnahmerolle

spielt, so kann man sagen, dass einer durch eine Ecke des Dreiecks  $pqr$  gehenden Geraden wiederum eine Gerade entspricht.

203. Hat man statt einer Geraden unendlich viele, welche sich alle in demselben Punkte  $s$  schneiden, also einen Strahlbüschel mit dem Scheitel  $s$ , so entsprechen ihnen unendlich viele Kegelschnitte, welche alle durch  $pqr$  und ausserdem durch den dem Punkte  $s$  entsprechenden Punkt  $s'$  gehn. Also entspricht dem Strahlbüschel  $[s]$  ein Kegelschnittbüschel mit den Basispunkten  $pqr s'$ . Diese beiden Büschel aber sind projectivisch.

Beweis. Sind

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 = 0, \quad n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = 0$$

irgend zwei Strahlen des Strahlbüschels, so kann jeder andere Strahl desselben durch die Gleichung

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3 + \lambda (n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3) = 0$$

dargestellt werden. Man erhält demnach die Gleichung des entsprechenden Kegelschnitts des Kegelschnittbüschels, wenn man in der Gleichung (3) [202]

$$m_i + \lambda n_i \text{ statt } m_i \ (i = 1, 2, 3)$$

setzt. Kegelschnitt und Strahl entsprechen einander also dann, wenn beide demselben Werthe von  $\lambda$  angehören. Mit hin [113] ist das Entsprechen ein projectivisches.

204. Beschreibt ein Punkt  $x$  einen Kegelschnitt, so beschreibt der ihm in einer Steiner'schen Verwandtschaft entsprechende Punkt  $y$  eine Curve 4. O., welche in den Ecken des Hauptdreiecks  $pqr$  drei Doppelpunkte besitzt.

Beweis. Wenn der gegebene Kegelschnitt die Gleichung

$$(1) \quad m_{11} x_1^2 + m_{22} x_2^2 + m_{33} x_3^2 + 2m_{23} x_2 x_3 \\ + 2m_{31} x_3 x_1 + 2m_{12} x_1 x_2 = 0$$

hat, so erhält man, indem man ebenso vorgeht, wie in [202], den geometrischen Ort des Puncts  $y$ , wenn man mit Hülfe der letzten Gleichung die  $x_i$  aus (2) in [202] eliminiert. Diese beiden Gleichungen aber geben

$$x_1 : x_2 : x_3 = A_1 y_2 y_3 : A_2 y_3 y_1 : A_3 y_1 y_2,$$

und substituirt man diese Ausdrücke in (1), so erhält man für den gesuchten geometrischen Ort

$$(2) \quad m_{11}A_1^2y_2^2y_3^2 + m_{22}A_2^2y_3^2y_1^2 + m_{33}A_3^2y_1^2y_2^2 + 2m_{23}A_2A_3y_1^2y_2y_3 \\ + 2m_{31}A_3A_1y_1y_2^2y_3 + 2m_{12}A_1A_2y_1y_2y_3^2 = 0,$$

also eine Curve 4. O. Da aber diese Gleichung keine der drei Variablen in einer höheren als der zweiten Potenz enthält, so ist jede der drei Ecken des Fundamentaldreiecks  $pqr$  ein Doppelpunct der Curve 4. O. [160].

Zusatz. Ist der gegebene Kegelschnitt dem Dreieck  $pqr$  umschrieben, sodass  $m_{11} = m_{22} = m_{33} = 0$  ist [102], so verwandelt sich die Gleichung (2) in folgende

$$y_1y_2y_3(m_{23}A_2A_3y_1 + m_{31}A_3A_1y_2 + m_{12}A_1A_2y_3) = 0.$$

In diesem Falle besteht also die Curve 4. O. aus den drei Seiten des Dreiecks  $pqr$  und einer vierten Geraden. Lässt man nun die ersteren wieder ausser Betracht, so kann man als Umkehrung von [202] sagen: Einem dem Dreieck  $pqr$  umschriebenen Kegelschnitte entspricht eine Gerade, und folgert dann ebenso wie in [203]:

Einem Kegelschnittbüschel, welcher  $pqr$  und irgend einen vierten Punct  $s$  zu Basispunkten hat, entspricht ein Strahlbüschel, dessen Scheitel der dem Puncte  $s$  entsprechende Punct  $s'$  ist; und diese beiden Büschel sind projectivisch.

205. Wenn ein Punct  $x$  eine Curve  $n$ . O. durchläuft, so beschreibt der ihm in einer Steiner'schen Verwandtschaft entsprechende Punct  $y$  eine Curve von der Ordnung  $2n$ , welche in jedem der drei Hauptpuncte  $pqr$  einen  $n$ -fachen Punct besitzt.

Beweis. Ordnet man die Gleichung der gegebenen Curve  $n$ . O. nach Potenzen von  $x_3$ , so kann man sie in folgender Form schreiben

$$(1) \quad \sum_0^n (a_{0h}x_1^h + a_{1h}x_1^{h-1}x_2 + \dots \\ + a_{h-1,h}x_1x_2^{h-1} + a_{hh}x_2^h)x_3^{n-h} = 0.$$

Nimmt man nun das Hauptdreieck  $pqr$  zum Fundamentaldreieck an, so erhält man, wie in [204], die Gleichung der entsprechenden Curve, wenn man statt  $x_1, x_2, x_3$  die Ausdrücke

$$x_1 : x_2 : x_3 = A_1y_2y_3 : A_2y_3y_1 : A_3y_1y_2$$

substituirt. Dadurch wird die Gleichung der entsprechenden



Curve, wenn man die neu auftretenden Coefficienten, den früheren  $a_{ik}$  entsprechend, mit  $b_{ik}$  bezeichnet, folgende:

$$\sum_0^n \left( b_{0k} y_2^k y_3^k + b_{1k} y_1 y_2^{k-1} y_3^k + \dots \right. \\ \left. + b_{k-1,k} y_1^{k-1} y_2 y_3^k + b_{kk} y_1^k y_3^k \right) y_1^{n-k} y_2^{n-k} = 0.$$

Ordnet man diese nach Potenzen von  $y_3$ , so erhält man

$$\sum_0^n \left( b_{0k} y_1^{n-k} y_2^n + b_{1k} y_1^{n-k+1} y_2^{n-1} + \dots \right. \\ \left. + b_{k-1,k} y_1^{n-1} y_2^{n-k+1} + b_{kk} y_1^n y_2^{n-k} \right) y_3^k = 0$$

oder ausgeschrieben

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} b_{00} y_1^n y_2^n + (b_{01} y_1^{n-1} y_2^n + b_{11} y_1^n y_2^{n-1}) y_3 \\ + (b_{02} y_1^{n-2} y_2^n + b_{12} y_1^{n-1} y_2^{n-1} + b_{22} y_1^n y_2^{n-2}) y_3^2 \\ + \dots \\ + (b_{0n} y_2^n + b_{1n} y_1 y_2^{n-1} + \dots + b_{n-1,n} y_1^{n-1} y_2 + b_{nn} y_1^n) y_3^n = 0. \end{array} \right.$$

Diese Curve ist also von der Ordnung  $2n$ , aber keine der Variablen kommt in einer höheren Potenz vor als in der  $n^{\text{ten}}$ ; daher sind die Ecken des Fundamentaldreiecks (die Hauptpunkte)  $n$ -fache Punkte. [160].

206. Wenn die Curve  $n$ . O. durch die Hauptpunkte hindurchgeht, so reducirt sich die entsprechende Curve  $2n$ . O. auf die Seiten des Hauptdreiecks und eine Curve von der Ordnung  $2n-3$ , welche in jedem Hauptpunkte einen  $(n-2)$ -fachen Punkt besitzt.

Beweis. Da die Curve in diesem Falle durch die Ecken des Fundamentaldreiecks geht, so ist [160] in der Gleichung (1) in [205]  $a_{00} = a_{0n} = a_{nn} = 0$  zu setzen, wodurch auch  $b_{00} = b_{0n} = b_{nn} = 0$  wird. Dadurch erhalten alle Glieder der Gleichung (2) den Factor  $y_1 y_2 y_3$ , und nach Absonderung desselben bleibt folgende Gleichung übrig

$$b_{01} y_1^{n-2} y_2^{n-1} + b_{11} y_1^{n-1} y_2^{n-2} \\ + (b_{02} y_1^{n-3} y_2^{n-1} + b_{12} y_1^{n-2} y_2^{n-2} + b_{22} y_1^{n-1} y_2^{n-3}) y_3 \\ + \dots \\ + (b_{1n} y_2^{n-2} + b_{2n} y_1 y_2^{n-3} + \dots + b_{n-1,n} y_1^{n-2}) y_3^{n-1} = 0.$$

Diese Gleichung ist von der Ordnung  $2n-3$ , aber die höchste Potenz der Variablen ist  $n-1$ , daher [160] ist jeder Haupt-

punct ein vielfacher Punct vom Grade  $2n-3-(n-1)$ , also ein  $(n-2)$ -facher Punct.

**Zusatz.** Einer Curve 3. O. ( $n=3$ ) entspricht daher im Allgemeinen eine Curve 6. O. Geht aber die erstere durch die Hauptpunkte, so entspricht ihr, wenn man die Seiten des Hauptdreiecks unberücksichtigt lässt, wieder eine Curve 3. O., welche auch durch die Hauptpunkte geht und diese zu einfachen Puncten hat. \*

**207.** Wenn eine Curve  $n$ . O. keine Doppelpuncte besitzt, so hat die ihr entsprechende Curve  $2n$ . O. ausser den in den Ecken des Hauptdreiecks befindlichen vielfachen Puncten keine weiteren Doppelpuncte. — Denn ein Doppelpunct der Curve  $2n$ . O. müsste dann gleichzeitig zweien verschiedenen Puncten der Curve  $n$ . O. entsprechen. Dies ist aber nur möglich, wenn diese letzteren Puncte auf einer der Seiten des Hauptdreiecks liegen, und dann ist der ihnen entsprechende Doppelpunct eben die gegenüberliegende Ecke des Hauptdreiecks. Wenn daher eine durch die Hauptpunkte gehende Curve 3. O. keine Doppelpuncte hat, so hat die ihr nach [206] entsprechende Curve 3. O. ebenfalls keine Doppelpuncte.

## §. 2.

**208. Aufgabe:** Wenn ein Strahlbüschel mit vier Strahlen  $m(a, b, c, d)$ , vier Puncte 1 2 3 4, und ausserdem drei Basispuncte  $pqr$  eines Kegelschnittbüschels gegeben sind, so soll man den geometrischen Ort eines Puncts  $x$  so bestimmen, dass, wenn derselbe als vierter Basispunct des Kegelschnittbüschels genommen wird, die durch die Puncte 1 2 3 4 gehenden Kegelschnitte dieses Büschels der Reihe nach den Strahlen  $m(a, b, c, d)$  projectivisch entsprechen; in Zeichen, dass

$$(1) \quad [pqr x] (1, 2, 3, 4) \wedge m(a, b, c, d)$$

sei.

**Auflösung.** Betrachtet man  $pqr$  als Diagonalpuncte irgend eines vollständigen Vierecks, so kann man dieses als Basis für eine Steiner'sche Verwandtschaft festsetzen. In dieser seien  $1', 2', 3', 4'$  die entsprechenden Puncte zu 1, 2, 3, 4, und  $x'$  der entsprechende Punct zu  $x$ . Dann entspricht dem

Kegelschnittbüschel  $[pqr x]$  (1, 2, 3, 4) nach [204] der Strahlbüschel  $x' (1', 2', 3', 4')$ , und zwar projectivisch. Es ist also

$$[pqr x] (1, 2, 3, 4) \overline{\wedge} x' (1', 2', 3', 4').$$

Demnach wird die Forderung (1) erfüllt, wenn  $x'$  so bestimmt wird, dass

$$x' (1', 2', 3', 4') \overline{\wedge} m (a, b, c, d)$$

wird. Der geometrische Ort des dieser Forderung Genüge leistenden Punctes  $x'$  aber kann nach [129] bestimmt werden, und zwar folgendermassen: Entspricht in einem Strahlbüschel mit dem Scheitel  $1'$  der Strahl  $1't$  dem Strahle  $ma$ , so dass

$$1' (t, 2', 3', 4') \overline{\wedge} m (a, b, c, d)$$

ist, so ist der geometrische Ort des Punctes  $x'$  ein Kegelschnitt, welcher durch  $1' 2' 3' 4'$  geht und die Gerade  $1't$  in  $1'$  berührt. Diesem Kegelschnitte entspricht in der Steiner'schen Verwandtschaft nach [204] eine Curve 4. O., welche  $pqr$  zu Doppelpuncten hat und durch  $1 2 3 4$  geht; diese Curve 4. O. ist daher der gesuchte geometrische Ort des Punctes  $x$ . (*Kortum*. Ueber geometrische Aufgaben dritten und vierten Grades. Bonn 1869. pag. 39.)

**209. Aufgabe.** Wenn ein Strahlbüschel mit fünf Strahlen  $m (a, b, c, d, e)$ , fünf Puncte 1, 2, 3, 4, 5, und ausserdem drei Basispuncte  $pqr$  eines Kegelschnittbüschels gegeben sind, so soll man den vierten Basispunct  $x$  des Letzteren so bestimmen, dass die durch die Puncte 1, 2, 3, 4, 5 gehenden Kegelschnitte des Büschels den Strahlen  $m (a, b, c, d, e)$  der Reihe nach projectivisch entsprechen; in Zeichen, dass

$$(1) \quad [pqr x] (1, 2, 3, 4, 5) \overline{\wedge} m (a, b, c, d, e)$$

sei.

**Auflösung.** Die Puncte  $x$ , welche der Forderung

$$[pqr x] (1, 3, 4, 5) \overline{\wedge} m (a, c, d, e)$$

genügen, erfüllen nach [208] eine Curve 4. O.,  $C$ , die  $p, q, r$  zu Doppelpuncten hat und durch  $1 3 4 5$  geht. Ebenso erfüllen die Puncte  $x$ , für welche

$$[pqr x] (2, 3, 4, 5) \overline{\wedge} m (b, c, d, e)$$

ist, eine zweite Curve 4. O.,  $C'$ , welche ebenfalls in  $pqr$  drei Doppelpuncte besitzt und durch  $2 3 4 5$  geht. Der

Punct  $x$ , welcher der Forderung (1) genügt, muss also ein Durchschnitt der beiden Curven  $C$  und  $C'$  sein. Aber diese Curven haben gemeinschaftlich die einfachen Punkte 3 4 5 und die Doppelpunkte  $pqr$ , also da in jedem der letzteren vier Durchschnitte vereinigt sind, im Ganzen fünfzehn Punkte. Der gesuchte Punct  $x$  ist also der sechzehnte Durchschnitt der beiden Curven  $C$  und  $C'$ . Um diesen Punct zu finden, wähle man irgend ein vollständiges Viereck, für welches  $pqr$  die Diagonalepunkte sind, als Basis für eine Steiner'sche Verwandtschaft und bestimme in dieser die entsprechenden Punkte  $1' 2' 3' 4' 5'$  zu 1 2 3 4 5. Dann entspricht nach [208] der Curve  $C$  der Kegelschnitt  $K$ , welcher durch  $1' 3' 4' 5'$  geht und in  $1'$  die Tangente  $1't$  hat, wenn

$$1'(t, 3', 4', 5') \overline{\wedge} m(a, c, d, e)$$

ist. Der Curve  $C'$  aber entspricht ein Kegelschnitt  $K'$ , der durch  $2' 3' 4' 5'$  geht und in  $2'$  die Tangente  $2's$  hat, die so construirt ist, dass  $2'(s, 3', 4', 5') \overline{\wedge} m(b, c, d, e)$  ist. Der letzte Durchschnitt  $x$  von  $C$  und  $C'$  entspricht daher dem vierten Durchschnitt  $x'$  der Kegelschnitte  $K$  und  $K'$ , die die drei Punkte  $3' 4' 5'$  gemeinsam haben.

Man hat hiernach zur Bestimmung des Punctes  $x$  folgende Constructionen auszuführen. Man construirt nach [83] irgend ein vollständiges Viereck so, dass  $pqr$  dessen Diagonalepunkte werden, und nimmt dieses Viereck als Basis für eine Steiner'sche Verwandtschaft. In dieser construirt man nach [201] die zu 1 2 3 4 5 entsprechenden Punkte  $1' 2' 3' 4' 5'$ . Sodann bestimmt man nach [91] die Strahlen  $1't$  und  $2's$  so, dass

$$1'(t, 3', 4', 5') \overline{\wedge} m(a, c, d, e)$$

$$2'(s, 3', 4', 5') \overline{\wedge} m(b, c, d, e)$$

ist. Nun construirt man nach [124] den vierten Durchschnitt  $x'$  der Kegelschnitte  $K$  und  $K'$ , welche die Punkte  $3' 4' 5'$  gemeinsam haben, und von denen der erste ausserdem durch den Punct  $1'$  und die Tangente  $1't$ , der zweite durch den Punct  $2'$  und die Tangente  $2's$  bestimmt ist. Endlich construirt man den zu  $x'$  in der Steiner'schen Verwandtschaft entsprechenden Punct  $x$ , so ist dies der verlangte. (Kortum. l. c. [208] pag. 43.)



## **Zweite Abtheilung.**

---

### **Curven dritter Ordnung.**



## Erster Abschnitt.

### Einleitende Sätze.

**210.** Bedeutet  $u$  entweder eine ganze rationale Function dritter Ordnung von zwei Parallel-Coordinationen oder eine ebensolche homogene Function von drei homogenen Punctcoordinationen, so ist die durch die Gleichung  $u = 0$  dargestellte Curve eine Curve dritter Ordnung.

**211.** Eine Curve dritter Ordnung ist entweder eine einfache Curve [133], oder sie besteht aus einer Geraden und einem Kegelschnitte, oder sie besteht endlich aus drei Geraden, von denen auch zwei oder alle drei zusammenfallen können.

**212.** Eine Gerade, welche nicht einen Theil einer Curve 3. O. bildet, schneidet diese in drei Puncten [134]. Von diesen können zwei zusammenfallen, dann ist die Gerade entweder eine Tangente an der Curve, oder sie trifft die Curve in einem Doppelpuncte. Es können auch alle drei Schnittpuncte zusammenfallen, dann ist die Gerade entweder eine Tangente in einem Doppelpuncte, oder sie ist eine Wendetangente, und der Durchschnittspunct ein Wendepunct. Von den drei Schnittpuncten der Geraden mit der Curve können zwei imaginär sein, einer aber ist stets reell [135].

**213.** Wenn eine Gerade mit einer Curve 3. O. mehr als drei Puncte gemein hat, so bildet sie einen Theil der Letzteren [137].

**214.** Eine Gerade, welche eine Curve 3. O. in einem Puncte  $a$  berührt, schneidet dieselbe ausserdem in einem Puncte  $a'$ , da sie drei Puncte mit jener gemein hat. Dieser Punct heisst der Tangentialpunct zugehörig zu dem Berührungspuncte. (*Salmon. On Curves of the 3<sup>d</sup> order. Phil. Trans. vol. 148. pag. 535. Cremona. Cve plane. art. 39. b.*) Zieht man in  $a'$  auf's Neue eine



Tangente an die Curve, so gehört zu  $a'$  wieder ein Tangentialpunct  $a''$ ; dieser heisst der zweite Tangentialpunct zu  $a$ . Der zu diesem zugehörige Tangentialpunct  $a'''$  heisst der dritte Tangentialpunct von  $a$ , u. s. f. (*Salmon l. c. pag. 537. Cremona. Cve plane. art. 67. c. d.*)

215. Wenn eine Curve 3. O. nicht einen Theil einer Curve  $n$ . O. bildet, und wenn beide Curven nicht eine Gerade oder einen Kegelschnitt mit einander gemein haben, so schneiden sie einander in  $3n$  Puncten, zwei solche Curven 3. O. also in 9 Puncten [138]. Wenn  $k$  von diesen Durchschnittspuncten in einen einzigen zusammenfallen, der nicht für eine der beiden Curven ein Doppel- oder mehrfacher Punct ist, so sagt man, dass die beiden Curven eine  $k$ -punctige Berührung mit einander eingehen.

216. Eine einfache Curve 3. O. kann höchstens einen Doppelpunct [oder Rückkehrpunct] haben [154]. Besteht sie aber aus einer Geraden und einem Kegelschnitt, so hat sie zwei Doppelpuncte, nämlich die beiden Durchschnittspuncte; und besteht sie aus drei Geraden, so hat sie drei Doppelpuncte, nämlich die drei Durchschnitte der Geraden.

217. Hat eine Curve 3. O. einen dreifachen Punct  $k$ , so besteht sie aus drei in diesem Puncte zusammenlaufenden Geraden. — Denn nimmt man auf der Curve irgendwo einen Punct  $a$  an, so hat die Gerade  $ka$  vier Puncte mit der Curve gemein und bildet daher [213] einen Theil der Curve. (*Cremona. Cve plane. art. 31.*)

218. Zur Bestimmung einer Curve 3. O. sind neun Puncte erforderlich und in der Regel auch hinreichend [142]. Sind aber neun Puncte die Durchschnitte zweier Curven 3. O., so gehen unendlich viele Curven 3. O. durch sie hindurch, welche einen Curvenbüschel 3. O. bilden [144].

219. Alle Curven 3. O., welche durch acht beliebig gegebene Puncte gehen, haben auch noch einen neunten Punct gemeinschaftlich, bilden also einen Curvenbüschel 3. O. [143.]

220. Wenn von den neun Durchschnittspuncten zweier Curven 3. O. drei auf einer Geraden liegen, so liegen die übrigen sechs auf einem Kegelschnitt; und umgekehrt: Liegen sechs auf einem Kegelschnitt, so liegen die übrigen drei in gerader Linie [148].

221. Von diesem Satze ist das *Pascal'sche* Theorem [87] ein specieller Fall. Denn sind 1, 2, 3, 4, 5, 6 sechs beliebige Punkte eines Kegelschnitts, so bilden die drei Geraden 12, 34, 56 eine Curve 3. O., ebenso auch die Geraden 23, 45, 61. Diese beiden Curven 3. O. schneiden sich in den neun Punkten

$$\begin{aligned} (12, 23) &= 2 & (34, 23) &= 3 & (56, 23) &= k \\ (12, 45) &= h & (34, 45) &= 4 & (56, 45) &= 5 \\ (12, 61) &= 1 & (34, 61) &= l & (56, 61) &= 6. \end{aligned}$$

Von diesen liegen 1, 2, 3, 4, 5, 6 auf einem Kegelschnitte, also die drei übrigen  $h, k, l$  auf einer Geraden. (*Salmon*. H. pl. Cvs. pag. 23.)

222. Wenn von neun Punkten einer Curve 3. O. drei in einer Geraden und die übrigen sechs auf einem Kegelschnitte liegen, so kann man unendlich viele Curven 3. O. durch diese neun Punkte legen. — Aus [218]; denn die Gerade und der Kegelschnitt bilden eine zweite Curve 3. O.

223. Liegen von neun Punkten in der Ebene drei in einer Geraden, die übrigen sechs aber nicht auf einem Kegelschnitt; oder: liegen sechs auf einem Kegelschnitt, die übrigen drei aber nicht in einer Geraden, so geht nur eine einzige Curve 3. O. durch die gegebenen neun Punkte. — Denn liesse sich mehr als eine Curve 3. O. durch sie hindurch legen, so könnten nach [220] die obigen Voraussetzungen nicht stattfinden.

224. Liegen von den neun Durchschnitten zweier Curven 3. O. zwei Mal drei in je einer Geraden, so liegen auch die letzten drei in einer Geraden. — Aus [220], da die beiden ersten Geraden zusammen einen Kegelschnitt bilden.

225. Zieht man aus den Durchschnitten  $a, a', a''$  einer Geraden mit einer Curve 3. O. Secanten  $abc, a'b'c', a''b''c''$ , so liegen die sechs Durchschnitte  $bc, b'c', b''c''$  derselben mit der Curve auf einem Kegelschnitt. (*Poncelet*. Analyse des Transversales. Crelle's Journ. Bd. 8. pag. 129.)

Beweis. Die drei Secanten bilden eine zweite Curve 3. O., deren Durchschnitte mit der gegebenen die neun Punkte  $abc, a'b'c', a''b''c''$  sind. Da drei von diesen  $a, a', a''$  in einer Geraden liegen, so liegen die sechs übrigen nach [220] auf einem Kegelschnitt.

226. Gehen die Secanten  $bc$ ,  $b'c'$ ,  $b''c''$  in Tangenten über, so folgt: Zieht man aus drei in gerader Linie liegenden Curvenpunkten  $a, a', a''$  irgend drei Tangenten an die Curve, so wird diese in den drei Berührungspunkten von einem Kegelschnitte berührt. — Es ist aber sehr beachtenswerth, dass dieser Kegelschnitt auch in zwei zusammenfallende Gerade degeneriren kann. (Vgl. [383, 542]).

227. Ebenso folgt umgekehrt: Liegen sechs Punkte einer Curve 3. O.  $bc, b'c', b''c''$  auf einem Kegelschnitt, und verbindet man dieselben paarweise durch gerade Linien z. B.  $bc$ ,  $b'c'$ ,  $b''c''$ , welche die Curve auf's Neue in  $aa'a''$  schneiden, so liegen die drei letzteren Punkte in einer Geraden. (Poncelet l. c. [225] pag. 129.)

228. Fällt von den drei Punctepaaren  $bc$ ,  $b'c'$ ,  $b''c''$  jedes in einen Punct zusammen, so folgt: Wenn ein Kegelschnitt eine Curve 3. O. in drei Punkten  $bb'b''$  berührt, so liegen deren drei Tangentialpunkte  $aa'a''$  in gerader Linie.

229. Sind  $a, a', a''$  drei in gerader Linie liegende Punkte einer Curve 3. O.;  $b, b', b''$  ebenfalls, und schneiden die Verbindungsgeraden  $ab$ ,  $a'b'$ ,  $a''b''$  die Curve in  $c, c', c''$ ; so liegen diese drei Punkte auch in gerader Linie.

Beweis. Die Geraden  $abc$ ,  $a'b'c'$ ,  $a''b''c''$  bilden eine Curve 3. O., welche diese neun Punkte mit der gegebenen gemeinschaftlich hat. Von diesen neun Durchschnittspunkten liegen zwei Mal drei  $aa'a''$  und  $bb'b''$  in je einer Geraden, also [224] auch die letzten drei.

230. Liegen drei Punkte  $a, a', a''$  einer Curve 3. O. in einer Geraden  $G$ , so liegen die ihnen zugehörigen Tangentialpunkte  $c, c', c''$  ebenfalls in einer Geraden  $G'$ . (Maclaurin. De linearum geometricarum proprietatibus, übers. v. Jonquières in *Mélanges de géométrie pure*. pag. 223.) — Denn lässt man in [229] die beiden Geraden  $aa'a''$  und  $bb'b''$  zusammenfallen, so werden die Secanten  $abc$ ,  $a'b'c'$ ,  $a''b''c''$  zu Tangenten, und die Punkte  $c, c', c''$  die Tangentialpunkte zu resp.  $a, a', a''$ .

Die Gerade  $G'$  heisst die Begleiterin der Geraden  $G$ , und der Durchschnitt dieser beiden Geraden der die Gerade  $G$  begleitende Punct. (Cayley. *Memoir on Curves of the third order*. Phil. Trans. vol. 147. pag. 416. „satellite line, satellite point.“

*Cremona. Cve. plane. art. 39. b. „retta satellite, punto satellite.“ Curtze übersetzt: beigeordnete Gerade, beigeordneter Punct. pag. 57.)*

**231.** Die Puncte, in welchen die drei Asymptoten einer Curve 3. O. diese schneiden, liegen in gerader Linie. (*Poncelet* 1. c. [225] pag. 130.) — Denn die Berührungspuncte der Asymptoten liegen auf der unendlich fernen Geraden [16], und die Asymptotendurchschnitte sind die Tangentialpuncte dieser unendlich fernen Berührungspuncte [230].

**232.** Sind  $a, a', a''$  die Schnitte einer Geraden mit einer Curve 3. O., und zieht man aus einem Puncte  $c$  der Letzteren die Geraden  $ca, ca', ca''$ , welche die Curve aufs Neue in  $b, b', b''$  schneiden, so hat der Kegelschnitt, welcher durch  $b, b', b''$  geht und die Tangente der Curve in  $c$  hier berührt, in diesem Puncte eine dreipunctige Berührung mit der Curve. (*Poncelet. Analyse des Transversales. Crelle's Journ. Bd. 8. pag. 134.*)

**Beweis.** Hält man die drei in gerader Linie liegenden Puncte  $a, a', a''$  fest, substituirt aber statt des einen Curvenpunctes  $c$  drei solche  $c, c', c''$ , und lässt die Puncte  $b, b', b''$ , durch die Schnitte der Geraden  $ca, ca', ca''$  mit der Curve entstehn, so liegen  $cc'c''bb'b''$  auf einem Kegelschnitte [225]. Lässt man nun die Puncte  $cc'c''$  in einen  $c$  zusammenfallen, so fallen in  $c$  drei Puncte des Kegelschnitts mit drei Curvenpuncten zusammen. (*Cremona. Cve. plane art. 39. d.*)

**233.** Geht eine Curve 3. O.  $u$  durch die Ecken 1, 2, 3, 4, 5, 6 eines Sechsecks und ausserdem durch die Durchschnitte zweier Paare gegenüberliegender Seiten z. B.  $(12, 45) = h$ ,  $(23, 56) = k$ , so geht sie auch durch den Durchschnitt  $(34, 61) = l$  des dritten Seitenpaares.

**Beweis.** Die Geraden 12, 34, 56 bilden eine Curve 3. O., ebenso 23, 45, 61. Diese zwei Curven schneiden sich in den neun Puncten 2,  $h$ , 1; 3, 4,  $l$ ;  $k$ , 5, 6. Die Curve  $u$  geht durch acht von diesen, nämlich 1, 2, 3, 4, 5, 6,  $h, k$ , also [219] auch durch den neunten  $l$ . (*Poncelet. Analyse des Transversales. Crelle's Journ. Bd. 8. pag. 132. Cremona. Cve. plane art. 45. c.*)

**Bemerkung.** Besteht  $u$  aus einem Kegelschnitt und einer Geraden, und liegen 1, 2, 3, 4, 5, 6 auf dem Kegelschnitt und  $h, k$  auf der Geraden, so folgt wieder das *Pascal'sche* Theorem [87], denn da der Kegelschnitt mit einer Curve 3. O. nicht sieben Puncte gemein haben kann, so kann der

neunte Punkt  $l$ , der auf  $u$  liegen muss, nicht auf dem Kegelschnitt, sondern muss auf der Geraden  $hk$  liegen. (*Cremona. Cve. plane. art. 45. c.*)

234. Zieht man in den sechs Punkten, in welchen ein Kegelschnitt eine Curve 3. O. schneidet, Tangenten an die Curve, so liegen die sechs Punkte, in denen diese Tangenten die Curve schneiden (die Tangentialpunkte der sechs Berührungspunkte [230]) auf einem neuen Kegelschnitt. (*Cremona art. 45. b.*)

Beweis. S. [248.]

235. Wenn ein Kegelschnitt mit einer Curve 3. O. in einem Punkte  $a$  eine fünfpunctige Berührung hat, und die Curve in  $b$  schneidet, so schneidet derjenige Kegelschnitt, welcher die Curve in dem zu  $a$  zugehörigen Tangentialpunkte  $a'$  fünfpunctig berührt, die Curve in dem zu  $b$  zugehörigen Tangentialpunkte  $b'$ .

Beweis. Fallen in [234] fünf Schnittpunkte des ersten Kegelschnittes in  $a$  zusammen, so fallen auch fünf Tangenten zusammen und daher auch die fünf zugehörigen Tangentialpunkte, und zwar diese nach  $a'$ . Demnach hat auch der zweite Kegelschnitt in  $a'$  eine fünfpunctige Berührung mit der Curve. Der sechste Punkt des ersten Kegelschnitts aber ist  $b$ , und der des zweiten der zu  $b$  gehörige Tangentialpunkt  $b'$ . (*Cremona. Cve. plane. art. 67. e.*)

## Zweiter Abschnitt.

### Erzeugung der Curven dritter Ordnung.

#### §. 1.

236. Wenn ein Strahlbüschel und ein Kegelschnittbüschel zu einander projectivisch sind [113], so ist der geometrische Ort der Durchschnitte jedes Strahls mit dem ihm entsprechenden Kegelschnitte eine Curve 3. O., welche durch den Mittelpunkt des Strahlbüschels und die vier Basispunkte des Kegelschnittbüschels hindurchgeht.

Beweis. Bedeuten  $A = 0$ ,  $A' = 0$  zwei Gerade,  $K = 0$ ,

$K' = 0$  zwei Kegelschnitte, und  $\lambda$  einen veränderlichen Parameter, so stellt [57]

$$A + \lambda A' = 0$$

einen Strahlbüschel, und [105]

$$K + \lambda K' = 0$$

einen Kegelschnittbüschel dar. Von diesen sind ein Strahl und ein Kegelschnitt projectivisch entsprechend, wenn ihnen der gleiche Werth von  $\lambda$  zugehört [113]; man erhält daher den geometrischen Ort der Durchschnitte entsprechender Strahlen und Kegelschnitte, wenn man  $\lambda$  aus den beiden letzten Gleichungen eliminirt. Dadurch erhält man die Gleichung

$$AK' - A'K = 0,$$

welche eine Curve 3. O. darstellt. Diese wird erfüllt, wenn gleichzeitig  $A = 0$  und  $A' = 0$  ist, daher geht die Curve durch den Mittelpunkt des Strahlbüschels, ferner auch, wenn gleichzeitig  $K = 0$  und  $K' = 0$  ist, daher geht die Curve auch durch die Basispunkte des Kegelschnittbüschels.

**237.** Wenn eine Curve 3. O. durch einen Strahlbüschel mit dem Mittelpunkte  $m$  und einen Kegelschnittbüschel mit den Basispunkten  $a b c d$  nach [236] erzeugt ist, so entspricht der Kegelschnitt, welcher durch  $m$  geht, demjenigen Strahle, welcher die Curve 3. O. in  $m$  berührt.

**Beweis.** Der durch  $m$  gehende Kegelschnitt hat ausser den Basispunkten  $a b c d$  den Punct  $m$  und noch einen sechsten Punct  $e$  mit der Curve gemein, der entsprechende von  $m$  ausgehende Strahl geht daher durch  $m$  und  $e$  und hat also in  $m$  zwei Puncte mit der Curve gemein.

**238.** Der Strahl, welcher durch einen Basispunct  $a$  des Kegelschnittbüschels geht, entspricht demjenigen Kegelschnitte, welcher die Curve 3. O. in  $a$  berührt.

**Beweis.** Der durch  $a$  gehende Strahl schneidet die Curve 3. O. in  $a$  und in einem dritten Puncte  $f$ . Der entsprechende Kegelschnitt geht daher ausser durch die Basispunkte  $a b c d$  noch durch  $a$  und  $f$ , hat also in  $a$  zwei Puncte mit der Curve gemein.

**239.** Wenn auf einer gegebene Curve 3. O. vier Puncte  $a b c d$  beliebig gegeben sind, so kann man dieselben stets

als die Basispunkte eines Kegelschnittbüschels annehmen, welcher mit einem Strahlbüschel, dessen Mittelpunkt  $m$  ebenfalls auf der Curve liegt, die letztere nach [236] erzeugt. Oder: Legt man durch vier beliebige feste Punkte  $a b c d$  einer Curve 3. O. einen variablen Kegelschnitt, welcher die Curve in  $n, p$ , schneidet, so geht die variable Gerade  $np$  durch einen festen Punkt  $m$  der Curve. Dieser Punkt  $m$  heisst der den vier Punkten  $a b c d$  gegenüberliegende Punkt. (Salmon pag. 133. Cremona art. 65.)

Beweis 1. Legt man durch  $a b c d$  einen beliebigen Kegelschnitt, schneidet damit die Curve in  $n, p$ , und mit der Geraden  $np$  in  $m$ , so muss, wenn es möglich sein soll, die gegebene Curve durch den Kegelschnittbüschel  $[a b c d]$  und einen projectivischen Strahlbüschel zu erzeugen,  $m$  der Mittelpunkt des Letzteren sein. Nun kann man zur Feztsetzung der Projectivität noch zwei Strahlen und zwei Kegelschnitte beliebig annehmen [113, 61, 35]. Diese aber sind bestimmt, wenn man noch zwei Punkte  $n'$  und  $n''$  auf der Curve annimmt und durch jeden einen Strahl und zugleich den entsprechenden Kegelschnitt gehen lässt. Dann ist zu jedem Kegelschnitt der projectivisch entsprechende Strahl bestimmt, und umgekehrt. Zugleich aber ist durch die neun Punkte  $a b c d n p m n' n''$  auch die Curve 3. O. eindeutig bestimmt; denn sollen durch die Punkte  $n', n''$  wirklich noch zwei Strahlen gehen, so dürfen  $n' n''$  nicht mit  $m$  in gerader Linie liegen, und da nun  $a b c d n p$  auf einem Kegelschnitte sich befinden, so ist nach [223] durch obige neun Punkte nur eine Curve 3. O. möglich. Demnach ist der Punkt  $m$  in der That der Mittelpunkt des Strahlbüschels, welcher mit dem Kegelschnittbüschel  $[a b c d]$  gerade die gegebene Curve 3. O. und keine andere erzeugt.

Beweis 2. Bedeuten  $A, B, C, D, E, F$  lineare Ausdrücke, und  $k$  eine Constante, so kann die Gleichung jeder Curve 3. O. auf unendlich viele Arten in die Form

$$A C E = k B D F$$

gebracht werden, weil diese Gleichung 13 Constanten enthält (jeder der linearen Ausdrücke  $A, B$ , etc. enthält zwei unabhängige Constanten), während die Gleichung einer Curve 3. O. schon durch 9 Constanten bestimmt ist. Wählt man nun die

Geraden  $A, B, C, D$  so, dass vier ihrer Durchschnitte die Punkte  $a, b, c, d$  sind, nämlich

$$(AB) = a, \quad (AD) = b, \quad (CB) = c, \quad (CD) = d^*),$$

und setzt ausserdem

$$(EF) = m,$$

so geht die durch die vorige Gleichung dargestellte Curve durch diese Punkte hindurch. Nun wird aber ein durch  $a b c d$  gehender Kegelschnittbüschel durch

$$AC = \lambda BD$$

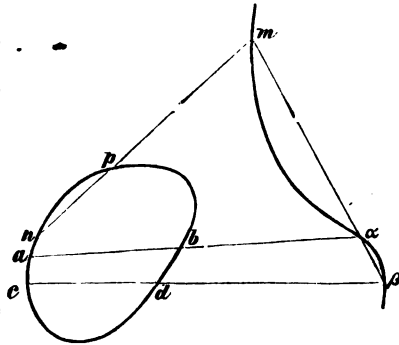
dargestellt, wenn  $\lambda$  einen veränderlichen Parameter bedeutet. Die Punkte, welche irgend einer dieser Kegelschnitte mit der Curve ausser  $a b c d$  noch gemeinsam hat, müssen daher der Gleichung

$$E = \frac{k}{\lambda} F$$

genügen und liegen daher stets auf einer durch  $(EF) = m$  gehenden Geraden. (*Salmon. pag. 133.*)

Beweis 3. (Fig. 20.) Man ziehe die Geraden  $ab, cd$ , und schneide damit die Curve in  $\alpha$  und  $\beta$ . Sei ferner  $m$  der Punkt, in welchem die Gerade  $\alpha\beta$  die Curve schneidet. Legt man nun durch  $abcd$  einen beliebigen Kegelschnitt, bezeichnet mit  $n$  einen der weiteren Durchschnitte desselben mit der Curve, und schneidet endlich die Curve mit der Geraden  $nm$  in  $p$ , so hat man drei in gerader Linie liegende Curvenpunkte  $\alpha, \beta, m$ , von welchen resp. die Secanten  $\alpha ab, \beta cd, mnp$  ausgehen. Nach [225] liegen daher  $ab cd np$  auf einem Kegelschnitte. Demnach ist  $p$ ,

Fig. 20.



\*) Dies ist immer möglich, denn nachdem hierdurch vier Punkte und gleichzeitig acht Constanten bestimmt sind, kann man die übrigen fünf Constanten so bestimmen, dass die Curve noch durch weitere fünf Punkte geht.



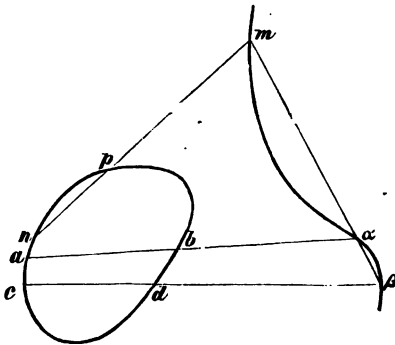
welcher der Annahme nach mit  $nm$  in einer Geraden liegt, der sechste Durchschnitt der Curve mit dem durch  $abcdn$  gelegten Kegelschnitte, und die Gerade  $np$  geht durch  $m$ . Da aber  $ab, cd$  und also auch  $\alpha, \beta$  fest bleiben, so ändert auch  $m$  sich nicht, wenn man den durch  $abcd$  gehenden Kegelschnitt variirt.

**240. Aufgabe.** Zu vier gegebenen Punkten  $abcd$  einer gegebenen Curve 3. O. den gegenüberliegenden Punkt  $m$  zu construiren. (Fig. 20.)

**Auflösung.** Man schneide die Curve mit den Geraden  $ab, cd$  in  $\alpha, \beta$ , und mit der Geraden  $\alpha\beta$  in  $m$ , so ist  $m$  der verlangte Punkt. — Denn die Geraden  $ab, cd$  bilden einen Kegelschnitt des Büschels  $[abcd]$  [239, oder unmittelbar aus Beweis 3.]

**241.** Fallen von den vier Punkten  $abcd$  je zwei zusammen, z. B.  $ac$  in  $a$ , und  $bd$  in  $b$ , so ist der gegenüberliegende Punkt  $m$  der Tangentialpunkt desjenigen

Fig. 20.



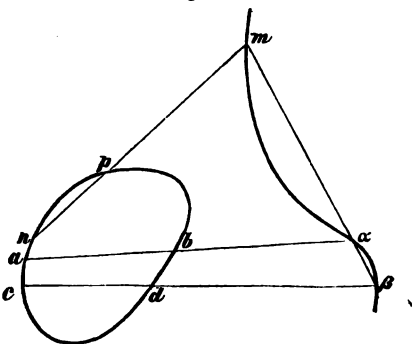
Punctes  $\alpha$ , in welchem die Gerade  $ab$  die Curve trifft. (Fig. 20.) — Denn dann fällt die Gerade  $cd$  auf  $ab$ , also auch  $\beta$  auf  $\alpha$ , und die Secante  $\alpha\beta$  wird zur Tangente in  $\alpha$ .

**242.** Wenn ein Kegelschnitt eine Curve 3. O. in einem Punkte  $a$  vierpunctig berührt, so ist der diesen vier zusammenfallenden Punkten gegenüberliegende Punkt  $m$  der zweite Tangentialpunkt [214] von  $a$ . Oder: Jeder Kegelschnitt, der eine Curve 3. O. in einem Punkte  $a$  vierpunctig berührt, schneidet die Curve in zwei Punkten  $n, p$ , deren Verbindungslinie durch den zweiten Tangentialpunkt von  $a$  geht. (*Salmon. On curves of the third order. Phil. Trans. vol. 148. pag. 537.*) — Denn lässt man in [241] die vier Punkte  $abcd$  in einen  $a$  zusammenfallen (Fig. 20), so fallen die Geraden  $ab$  und  $cd$  beide in die Tangente in  $a$ . Demnach fallen auch die Punkte  $\alpha, \beta$  zusammen und zwar in

den Tangentialpunkt von  $a$ . Dadurch wird dann die Gerade  $\alpha \beta m$  die Tangente der Curve in  $\alpha$ , und folglich  $m$  der Tangentialpunkt von  $\alpha$  oder der zweite Tangentialpunkt von  $a$ . (*Cremona. art. 67 c.*)

243. Hat ein Kegelschnitt mit einer Curve 3. O. in einem Punkte  $a$  eine fünfpunctige Berührung, so liegt der sechste Durchschnittspunct beider auf der Geraden, welche  $a$  mit dem zweiten Tangentialpuncte von  $a$  verbindet. — Aus [242], (Fig. 20), denn wenn auch noch  $n$  mit  $a$  zusammenfällt, so geht die Gerade  $npm$  in  $apm$  über.

Fig. 20.



(*Poncelet l. c. [225] pag. 135. Cremona art. 67. c.*)

244. Nimmt man auf einer Curve 3. O. drei Punkte  $abc$  und einen vierten  $m$  beliebig aber fest an, und zieht durch  $m$  einen variablen Strahl, welcher die Curve in  $np$  schneidet, so trifft der durch die festen Punkte  $abc$  und durch  $n, p$  gelegte variable Kegelschnitt die Curve in einem festen Punkte  $d$ . Oder: Man kann den Punkt  $m$  stets als Mittelpunkt eines Strahlbüschels ansehen, der mit einem Kegelschnittbüschel, von welchem  $abc$  drei Basispunkte sind, die gegebene Curve erzeugt; der vierte Basispunkt ist dann der Punkt  $d$ .

Beweis 1. Wenn es möglich sein soll, die Curve durch einen Strahlbüschel  $[m]$  und einen Kegelschnittbüschel, von welchem  $abc$  drei Basispunkte sind, zu erzeugen, so muss der auf die angegebene Art bestimmte Punkt  $d$  der vierte Basispunkt des Kegelschnittbüschels sein. Verfährt man nun ebenso wie in [239. Bew. 1], so wird durch die Annahme zweier weiterer Curvenpunkte  $n', n''$  gleichzeitig die Projectivität der beiden Büschel und die Curve 3. O. eindeutig bestimmt, sodass durch den Strahlbüschel  $[m]$  und den Kegelschnittbüschel  $[abc d]$  gerade die gegebene Curve 3. O. erzeugt wird. Demnach ist  $d$  wirklich der vierte Basispunkt, und daher ein fester Punkt der Curve.

Beweis 2. Stellt man die Curve, wie in [239] durch die Gleichung

$$ACE = k B D F$$

dar, indem man die gegebenen Punkte als die Durchschnitte

$$(AB) = a, \quad (AD) = b, \quad (CB) = c, \quad (EF) = m$$

annimmt, so hat jede durch  $m$  gehende Gerade die Gleichung

$$E = \lambda F.$$

Die Durchschnitte derselben mit der Curve müssen dann der Gleichung

$$AC = \frac{k}{\lambda} BD$$

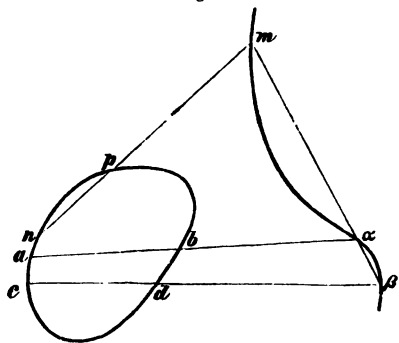
genügen und daher auf einem Kegelschnitte liegen, der nicht bloss durch die Punkte  $(AB) = a$ ,  $(AD) = b$ ,  $(CB) = c$ , sondern auch durch den festen Punkt

$$(CD) = d$$

hindurch geht.

Beweis 3. (Fig. 20.) Schneidet man die Curve mit  $ab$  in  $\alpha$ , mit  $\alpha m$  in  $\beta$ , mit  $\beta c$  in  $d$  und legt durch  $m$  einen beliebigen Strahl, der die Curve

Fig. 20.



in  $n, p$  trifft, so hat man drei in gerader Linie liegende Curvenpunkte  $m, \alpha, \beta$ , von welchen die Secanten  $mnp, \alpha ab, \beta cd$  ausgehen, daher [225] liegen  $np ab cd$  auf einem Kegelschnitt. Demnach ist  $d$  der Punkt, in welchem der durch  $abcnp$  gehende Kegelschnitt die Curve zum sechsten Male

trifft. Aber mit  $abc$  und  $m$  bleiben auch  $\alpha, \beta, d$  ungeändert; daher bleibt  $d$  ein fester Punkt, wenn man den Strahl  $mnp$  variirt.

Zusatz. Der vier Curvenpunkten  $abcd$  gegenüberliegende Punkt  $m$  hat demnach die Eigenschaft, dass jeder durch  $abcd$  gehende Kegelschnitt die Curve in zwei Punkten  $np$  trifft, welche mit  $m$  in einer Geraden liegen [239], und dass

jede durch  $m$  gehende Gerade die Curve in zwei Punkten  $n, p$  trifft, die mit  $a b c d$  in einem Kegelschnitte liegen.

245. Sind  $a b \alpha$  drei Punkte einer Curve 3. O. in gerader Linie, und zieht man durch den Tangentialpunkt  $m$  eines derselben, z. B.  $\alpha$ , eine Gerade  $m n p$ , so schneidet diese die Curve in zwei Punkten  $n, p$ , welche auf einem Kegelschnitte liegen, der die Curve in den beiden anderen Punkten  $a$  und  $b$  berührt.

Beweis 1. (Fig. 20.) Dieser Satz entsteht aus dem vorigen, wenn man  $c$  mit  $a$ , und  $\beta$  mit  $\alpha$  zusammenfallen lässt, wodurch  $m$  der Tangentialpunkt von  $\alpha$  wird. Dann fällt auch  $d$  mit  $b$  zusammen, und der durch  $a b c d n p$  gehende Kegelschnitt verwandelt sich in einen, welcher durch  $n, p$  geht und die Curve in  $a$  und  $b$  berührt. (Cremona. art. 150.)

Beweis 2. Bedeuten  $A, B, C, D, F$  lineare Ausdrücke, und  $k$  eine Constante, so kann die Gleichung einer Curve 3. O. auf unendlich viele Arten in die Form

$$ABC = kD^2F$$

gebracht werden, weil diese Gleichung 11 Constanten enthält. Dann trifft jede der Geraden  $A, B, C$  die Curve da, wo diese von zwei mit  $D$  zusammenfallenden Geraden getroffen wird, und ausserdem da, wo die Gerade  $F$  die Curve schneidet. Also sind  $A, B, C$  drei Tangenten der Curve, deren Berührungspunkte  $(AD) = a$ ,  $(BD) = b$ ,  $(CD) = \alpha$  auf der Geraden  $D$  liegen. Die Tangentialpunkte  $(AF)$ ,  $(BF)$ ,  $(CF)$  dieser Berührungspunkte aber liegen auf der Geraden  $F$ , welche daher die Begleiterin der Geraden  $D$  ist [230]. Sei  $m = (CF)$  der Tangentialpunkt von  $\alpha$ . Legt man durch diesen eine beliebige Gerade  $C = \lambda F$ , so erhält man für die Durchschnitte derselben mit der Curve die Gleichung

$$AB = \frac{k}{\lambda} D^2.$$

Diese liegen daher auf einem Kegelschnitte, welcher die Geraden  $A$  und  $B$  in den Punkten  $(AD) = a$  und  $(BD) = b$  berührt. (Vgl. [131]). (Salmon. pag. 160.)

246. Lässt man im Vorigen die Punkte  $n$  und  $p$  zusammenfallen, also im Allgemeinen die Secante  $mnp$  in eine

Tangente übergehen, so wird man auf einen mit [226] zusammenhängenden Satz geführt, nämlich: Sind  $a b \alpha$  drei Curvenpunkte in gerader Linie, und zieht man aus dem Tangentialpunkte  $m$  eines derselben, z. B.  $\alpha$ , eine von  $m \alpha$  verschiedene Tangente  $m n$  an die Curve, so wird diese in den drei Punkten  $a$ ,  $b$  und  $n$  von einem Kegelschnitte berührt. (Vgl. [383, 542.] )

Bemerkung. Das Zusammenfallen der Punkte  $n, p$  kann auch dadurch entstehen, dass ein Doppelpunct existirt, und die Gerade  $m n$  durch ihn hindurch geht. Dann liegt derselbe auch auf dem die Curve in  $a$  und  $b$  berührenden Kegelschnitte.

247. Sind  $a b c d$  vier beliebige Curvenpunkte,  $m$  ihr gegenüberliegender Punkt, und  $a' b' c' d' m'$  die Tangentialpunkte der vorhergehenden, so ist  $m'$  der gegenüberliegende zu  $a' b' c' d'$ .

Beweis. Schneiden die Geraden  $a b$  und  $c d$  die Curve in  $\alpha$  und  $\beta$ , so liegen  $\alpha \beta m$  in gerader Linie [240]. Sind aber  $\alpha'$  und  $\beta'$  die Tangentialpunkte von  $\alpha$  und  $\beta$ , so liegen auch  $a' b' \alpha'$  und  $c' d' \beta'$  in je einer Geraden [230] d. h.  $\alpha'$  und  $\beta'$  sind die Schnitte der Geraden  $a' b'$  und  $c' d'$  mit der Curve. Der gegenüberliegende zu  $a' b' c' d'$  muss nun nach [240] mit  $\alpha', \beta'$  in einer Geraden liegen; aber da  $\alpha \beta m$  eine Gerade bilden, so liegen auch  $\alpha' \beta' m'$  in einer Geraden, und daher ist  $m'$  dieser gegenüberliegende Punkt. (Mittheilung von Herrn Prof. Küpper.)

248. Schneidet ein Kegelschnitt eine Curve 3. O. in den sechs Punkten  $a b c d e f$ , so liegen die Tangentialpunkte  $a' b' c' d' e' f'$  der letzteren auf einem neuen Kegelschnitte. (Cremona. art. 45. b.)

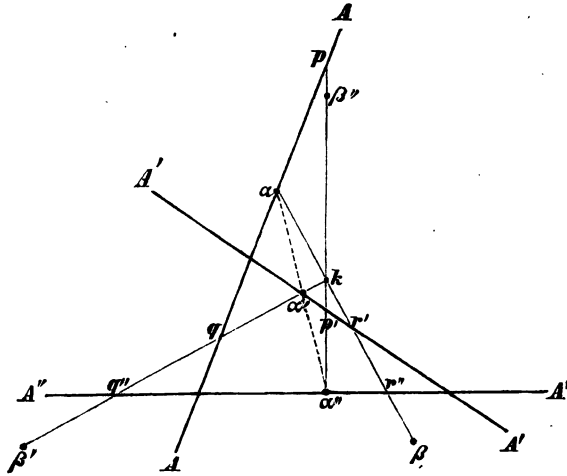
Beweis. Sind  $m$  und  $m'$  die gegenüberliegenden Punkte zu resp.  $a b c d$  und  $a' b' c' d'$ , so ist nach [247]  $m'$  gleichzeitig der Tangentialpunkt von  $m$ . Da nun  $m e f$  in gerader Linie liegen [239], so liegen auch  $m' e' f'$  in einer Geraden [230], und folglich geht der durch  $a' b' c' d' e'$  gelegte Kegelschnitt auch durch  $f'$ . [244. Zus.]

## §. 2.

**249. Aufgabe.** Eine Curve 3. O. nach folgenden Daten zu construiren. Gegeben seien drei Punkte der Curve in gerader Linie  $a\ a'\ a''$ , die Tangenten  $A\ A'\ A''$  in diesen, die Tangentialpuncte  $\alpha, \alpha'$  von  $a, a'$  und irgend ein neunter Punkt  $k$ .

**Auflösung.** Der Tangentialpunct  $\alpha''$  von  $a''$  ist als Durchschnitt von  $\alpha\alpha'$  mit  $A''$  ebenfalls bekannt [230]. Zieht man  $\alpha k$  und sucht nach [89] den Schnittpunct  $\beta$  dieser Geraden mit einem Kegelschnitte, der durch  $k$  geht und  $A', A''$  in  $a', a''$  berührt, so ist  $\beta$  nach [245] ein Punct der Curve. Ebenso findet man einen zweiten Curvenpunct  $\beta'$  als Durchschnitt der Geraden  $\alpha'k$  mit einem Kegelschnitte, welcher durch  $k$  geht und  $A, A''$  in  $a, a''$  berührt; und einen dritten Curvenpunct  $\beta''$  als Durchschnitt von  $\alpha''k$  mit einem Kegelschnitte, der durch  $k$  geht und  $A, A'$  in  $a, a'$  berührt. Indem man jeden dieser Punkte  $\beta, \beta', \beta''$  an Stelle von  $k$  treten lässt, kann man das Verfahren wiederholen und sich so viele Curvenpuncte verschaffen, als man will. (*Salmon. pag. 160.*)

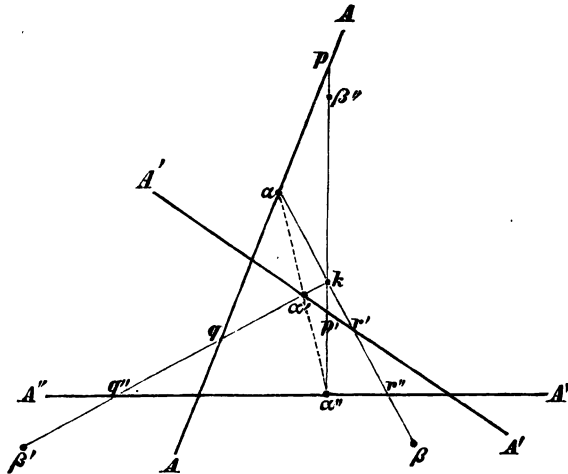
Fig. 21.



**250. Aufgabe.** Eine Curve 3. O., welche drei reelle Asymptoten hat, nach folgenden Daten zu construiren. Gegeben sind die drei Asymptoten  $A, A', A''$ , die in gerader Linie [231] liegenden Durchschnittse  $\alpha, \alpha', \alpha''$  derselben mit der Curve, und ausserdem ein Curvenpunct  $k$ . (Fig. 21.)

Auflösung. Man ziehe durch  $k$  und den einen der drei Asymptotendurchschnitte, z. B.  $\alpha$ , eine Gerade und schneide damit die beiden anderen Asymptoten  $A', A''$  in  $r', r''$ . Macht man dann auf dieser Geraden  $kr' = r''\beta$ , so ist  $\beta$  ein neuer Curvenpunct. Ebenso findet man einen zweiten Curvenpunct  $\beta'$ , wenn man die Asymptoten  $A, A''$  mit  $\alpha'k$  in  $q, q''$  schneidet und  $kq = q''\beta'$  macht, und endlich einen dritten  $\beta''$ , indem man  $A, A'$  mit  $\alpha''k$  in  $p, p'$  schneidet und  $kp = p'\beta''$  macht. Lässt man dann jeden der drei gefundenen Punkte  $\beta \beta' \beta''$  an Stelle von  $k$  treten, so kann man sich so viele Curvenpunkte verschaffen, als man will. (Plücker. System der anal. Geom. pag. 167.)

Fig. 21.

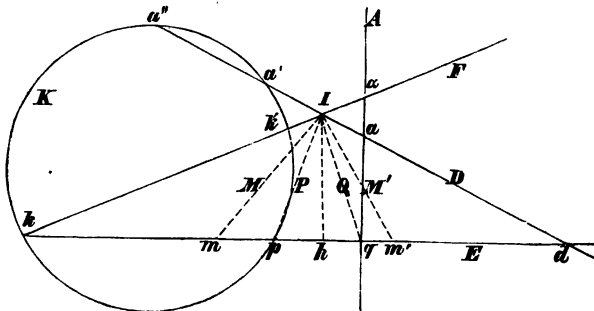


Beweis. In diesem Falle liegen die Berührungspunkte der Tangenten  $A A' A''$  auf der unendlich fernen Geraden, und die Tangentialpunkte der unendlich fernen Berührungspunkte sind die Asymptotendurchschnitte  $\alpha \alpha' \alpha''$ . Da nun nach [245] eine durch  $k$  und etwa  $\alpha$  gezogene Gerade die Curve in einem Kegelschnitt schneidet, welcher durch  $k$  geht und die Tangenten  $A A'$  in deren Berührungspunkten berührt, so muss hier dieser Kegelschnitt eine Hyperbel sein, welche  $A A''$  zu ihren Asymptoten hat. Schneidet aber eine Gerade

eine Hyperbel in  $k, \beta$  und deren Asymptoten in  $r', r''$ , so ist  $kr' = r''\beta$ .

251. (Fig. 22.) Seien  $a, a', a''$  drei in einer Geraden  $D$  liegende Curvenpunkte. Man lege in einem derselben, etwa in  $a$ , eine Tangente  $A$  an die Curve und durch die beiden anderen  $a', a''$  einen Kegelschnitt  $K$ , welcher die Curve in  $a'$  und  $a''$  berührt, sodass die Durchschnitte  $\alpha, k, k'$  von  $A$  und  $K$  mit der Curve ebenfalls in einer Geraden  $F$  liegen [241]. Zieht man nun durch einen der beiden Durchschnitte des Kegelschnittes  $K$  mit der Curve, etwa durch  $k$ , eine beliebige Gerade  $E$ , und schneidet mit dieser den Kegelschnitt  $K$  in  $p$ , die Tangente  $A$  in  $q$ , die Gerade  $D$  in  $d$ , endlich die Curve in  $m$  und  $m'$ , so ist der in Beziehung auf  $p, q$  zu  $d$  zugeordnete harmonische Punkt  $h$  auch in Beziehung auf  $m$  und  $m'$  zu  $d$  harmonisch zugeordnet.

Fig. 22.



Beweis. Bezeichnet man mit  $A = 0$ ,  $D = 0$ ,  $F = 0$ ,  $K = 0$  die Gleichungen der mit denselben Buchstaben bezeichneten Linien, so hat im vorliegenden Falle die Gleichung der Curve die Form

$$AK - D^2 F = 0,$$

da  $D$  durch die Berührungspunkte von  $A$  und  $K$  mit der Curve, und  $F$  durch die übrigen Durchschnitte geht. Diese Form kann die Curvengleichung immer annehmen, da man über 11 Constanten verfügen kann. Nun nehme man die Geraden  $E, F, D$  der Reihe nach zu den Seiten  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$  des Fundamentaldreiecks und setze



$$A = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$$

$$K = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_2x_3 + dx_3x_1 + ex_1x_2,$$

indem das Glied  $x_3^2$  in dem Polynom  $K$  fehlen muss, weil dieser Kegelschnitt durch die Fundamentalecke  $x_1=0, x_2=0$  hindurch geht. Die Gleichung der Curve heisst nun

$$AK - x_2x_3^2 = 0.$$

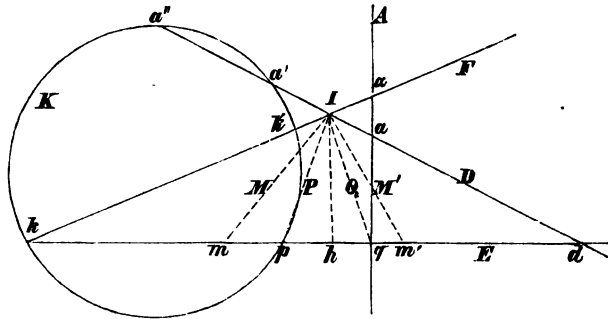
Setzt man darin  $x_1 = 0$ , so erhält man die Gleichung

$$x_2 [(a_2x_2 + a_3x_3)(bx_2 + cx_3) - x_3^2] = 0,$$

welche die von der Ecke  $I (x_2 = 0, x_3 = 0)$  nach den Punkten  $k, m, m'$  gehenden Geraden  $F, M, M'$  darstellt. Ebenso erhält man die Gleichungen der von  $I$  nach  $k, p, q$  gehenden Geraden  $F, P, Q$ , wenn man  $x_1 = 0$  setzt in der Gleichung  $A \cdot K = 0$ , also

$$x_2 (a_2x_2 + a_3x_3)(bx_2 + cx_3) = 0.$$

Fig. 22.



Da nun  $x_2 = 0$  die Gerade  $F$  darstellt, so ist

$$M \cdot M' = (a_2x_2 + a_3x_3)(bx_2 + cx_3) - x_3^2$$

$$P \cdot Q = (a_2x_2 + a_3x_3)(bx_2 + cx_3)$$

und daher

$$M \cdot M' = P \cdot Q - x_3^2.$$

Bezeichnet man nun noch mit  $y$  den Strahl  $Ih$ , wo  $h$  harmonisch zugeordnet ist zu  $d$  in Bezug auf  $p$  in  $q$ , so kann man setzen [59]

$$P = y + \lambda x_3 \quad Q' = y - \lambda x_3.$$

Daraus folgt

$$P \cdot Q = y^2 - \lambda^2 x_3^2 \text{ und daher } M \cdot M' = y^2 - (\lambda^2 + 1) x_3^2;$$

mithin ist

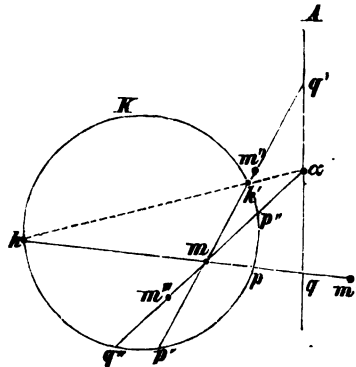
$$M = y + \sqrt{\lambda^2 + 1} \cdot x_3 \quad M' = y - \sqrt{\lambda^2 + 1} \cdot x_3$$

d. h.  $h$  und  $d$  sind auch harmonisch zugeordnet in Beziehung auf  $m$  und  $m'$ .

**252.** (Fig. 22.) Ist  $A$  eine Asymptote einer Curve 3. O. und zwar die reelle, wenn nur eine solche vorhanden ist,  $K$  ein Kegelschnitt, der die beiden anderen Asymptoten der Curve zu seinen eigenen Asymptoten hat, schneiden ferner  $A$  und  $K$  die Curve in  $\alpha$ ,  $k$ ,  $k'$ , und zieht man durch einen der Punkte  $k$  oder  $k'$ , z. B. durch  $k$ , eine beliebige Gerade, welche  $K$  und  $A$  in  $p$  und  $q$ , die Curve aber in  $m$  und  $m'$  schneide, so ist die Mitte von  $pq$  zugleich die Mitte von  $mm'$ , oder es ist  $mp = qm'$ . — Denn lässt man in [251] die Gerade  $D$ , welche durch die Berührungspunkte von  $A$  und  $K$  mit der Curve geht, ins Unendliche rücken, so rückt auch  $d$  ins Unendliche, und daher fällt  $h$  gleichzeitig in die Mitte von  $pq$  und von  $mm'$ .

**253.** Aufgabe. (Fig. 23.) Eine Curve 3. O., welche nur eine reelle Asymptote hat, nach folgenden Daten zu construiren. Gegeben sei: die reelle Asymptote  $A$ , nebst ihrem Durchschnitt  $\alpha$  mit der Curve; eine Ellipse  $K$ , deren imaginäre Asymptoten die der Curve seien, sowie ihre Durchschnitte  $k, k'$  mit der Curve (nach [241] müssen  $\alpha k k'$  in gerader Linie liegend angenommen werden); sodann noch irgend ein Curvenpunkt  $m$ .

Fig. 23.

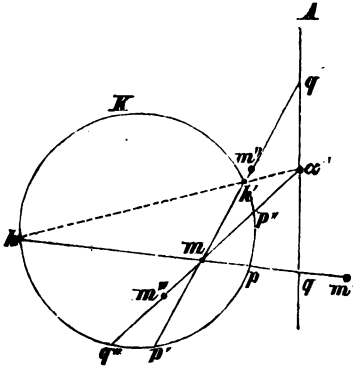


**Auflösung.** Man ziehe durch  $m$  und  $k, k'$  drei Gerade; schneide  $K$ ,  $A$  mit  $km$  in  $p, q$  und mache  $qm' = mp$ ; mit

$k'm$  in  $p', q'$  und mache  $q'm'' = mp'$ ; schneide endlich  $K$  mit  $\alpha m$  in  $p'', q''$  und mache  $q''m''' = mp''$ , so sind  $m' m'' m'''$  drei neue Curvenpunkte. Lässt man diese nach und nach an Stelle von  $m$  treten und wiederholt die Construction, so kann man sich so viele Punkte verschaffen als man will. (Plücker. System d. anal. Geom. pag. 172.)

Beweis. Für die aus  $k$  und  $k'$  gezogenen Geraden  $km$  und  $k'm$  folgt die Construction der auf ihnen liegenden Curvenpunkte  $m'$  und  $m''$  unmittelbar aus [252]. Der auf der Geraden  $\alpha m$  liegende Curvenpunkt  $m'''$  aber muss nach [245]

Fig. 23.

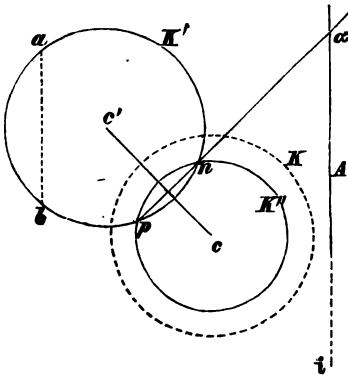


auf einem Kegelschnitte liegen, der durch  $m$  geht, und die imaginären Asymptoten der Curve zu seinen eigenen Asymptoten hat. Dieser Kegelschnitt ist also eine mit  $K$  concentrische, ähnliche und ähnlich liegende Ellipse (S. u. a. Salmon. Anal. Geometrie der Kegelschnitte,

deutsch von Fiedler. 2. Aufl. art. 276.) Alsdann aber muss  $q''m''' = mp''$  sein.

254. Aufgabe (Fig. 24.) Eine Curve 3. O. nach folgenden Daten zu construiren:

Fig. 24.



Gegeben sei eine reelle Asymptote  $A$  nebst ihrem Durchschnitte  $\alpha$  mit der Curve; zwei Curvenpunkte  $a, b$ , deren Verbindungslinie zu  $A$  parallel sei, und dann ein Kegelschnitt  $K$ , der die beiden anderen Asymptoten  $A', A''$  der Curve zu seinen eigenen Asymptoten habe. (Sind die letzteren reell, so kann man sie selbst statt des Kegelschnitts  $K$  als gegeben

betrachten, sind sie aber imaginär, so nimmt man eine beliebige Ellipse  $K$  als gegeben an, deren Mittelpunkt  $c$  dann

den Durchschnitt der beiden Asymptoten bildet. Uebrigens braucht von dieser Ellipse nur der Mittelpunkt  $c$ , die Richtung der Axen und das Axenverhältniss bekannt zu sein.)

**Auflösung.** Man lege durch  $a, b$  irgend einen Kegelschnitt  $K'$ , der zu  $K$  ähnlich und ähnlich liegend ist, verbinde dessen Mittelpunkt  $c'$  mit  $c$ , und ziehe aus  $a$  eine Gerade, deren Richtung zu dem Durchmesser  $cc'$  conjugirt ist; dann schneidet diese Gerade den Kegelschnitt  $K'$  in zwei Curvenpunkten  $n, p$ . Indem man den durch  $a, b$  gelegten zu  $K$  ähnlichen und ähnlich liegenden Kegelschnitt  $K'$  variirt, kann man sich so viele Curvenpunkte verschaffen, als man will.

**Beweis.** Bezeichnet man mit  $i, i', i''$  die unendlich fernen Punkte der Asymptoten  $A, A', A''$ , so ist  $a$  der gegenüberliegende Punkt zu  $i', i''$ , wenn man in jedem der letzteren zwei Punkte vereinigt denkt [241]. Daher liegen die Punkte  $n, p$ , in welchen eine durch  $a$  gehende Gerade die Curve schneidet, in einem Kegelschnitte  $K''$ , der die Asymptoten  $A', A''$  in  $i', i''$  berührt [245], d. h. der mit  $K$  concentrisch, ähnlich und ähnlich liegend ist und daher  $c$  zum Mittelpunkt hat. (*Salmon*. I. c. [253]). Ausserdem aber ist  $a$  auch der gegenüberliegende Punkt zu  $i', i'', a, b$ ; denn sucht man diesen nach [240] auf, so hat man die Durchschnitte der Curve mit  $i' i''$  und mit  $a b$  zu bestimmen, diese aber fallen beide in den Punkt  $i$ , mithin ist der gesuchte gegenüberliegende Punkt der Tangentialpunkt von  $i$ , d. h.  $a$ . Demnach liegen die Punkte  $n, p$  auch auf einem Kegelschnitte  $K'$ , der durch  $i', i'', a, b$  geht, d. h. der durch  $a, b$  geht und zu  $K$  ähnlich und ähnlich liegend ist. Also ist  $np$  die Durchschnittssehne zweier ähnlicher und ähnlich liegender Kegelschnitte. Diese aber ist der Richtung nach conjugirt zu den die Mittelpunkte  $c$  und  $c'$  verbindenden Durchmessern der beiden Kegelschnitte. \*)

---

\*) Die Ausführung dieser Construction ist freilich noch immer sehr mühsam, sie gestaltet sich aber ausserordentlich einfach, wenn die beiden Asymptoten  $A', A''$  imaginär, und ihre unendlich fernen Punkte  $i', i''$  die imaginären Kreispunkte sind. Denn dann verwandeln sich die ähn-

## §. 3.

**255. Aufgabe.** Wenn eine Curve 3. O. durch neun Punkte  $abcde fghi$  gegeben ist, zu vier derselben,  $abcd$ , den gegenüberliegenden Punct  $m$  zu construiren.

**Auflösung.** Man betrachte  $abcd$  als Basispunkte eines Kegelschnittbüschels und construire nach [90] die Tangenten, welche die fünf resp. durch  $e, f, g, h, i$  gehenden Kegelschnitte des Büschels in einem der Basispunkte z. B. in  $a$  berühren. Der so entstehende Tangentenbüschel sei mit  $a(e'f'g'h'i')$  bezeichnet. Construirt man dann nach [130] den Punct  $m$  so, dass die Strahlen des Büschels  $m(efghi)$  den eben erwähnten Tangenten der Reihe nach projectivisch entsprechen, so ist  $m$  der verlangte gegenüberliegende Punct zu  $abcd$ . — Denn alsdann ist nach [113] der Strahlbüschel  $[m]$  projectivisch mit dem Kegelschnittbüschel  $[abcd]$ , und beide zusammen erzeugen daher die gegebene Curve 3. O. (*Chasles. Construction de la courbe du 3. O. Comptes rendus. Tome 36. pag. 951. — Cremona art. 66.*)

**256. Aufgabe.** Wenn eine Curve 3. O. durch neun Punkte gegeben ist, und man nimmt einen davon als Mittelpunkt eines Strahlbüschels und drei andere unter ihnen als Basispunkte eines Kegelschnittbüschels, so soll man den vierten Basispunkt des letzteren finden, so dass dieser mit dem Strahlbüschel zusammen die gegebene Curve erzeugt.

**Auflösung.** Seien  $pqr12345m$  die gegebenen neun Punkte, und zwar bezeichne man mit  $m$  denjenigen, den man zum Mittelpunkt des Strahlbüschels, und mit  $pqr$  diejenigen, die man zu Basispunkten des Kegelschnittbüschels wählt.

---

lichen und ähnlich liegenden Ellipsen in Kreise, und die Gerade  $\alpha np$  wird senkrecht auf  $cc'$ . (Vgl. Schlömilch's Zeitschr. f. Math. Bd. 14. pag. 368.) In diesem Falle hat diese Construction den Vorzug vor der in [253] mitgetheilten, dass die Curvenpunkte unabhängig von einander gefunden werden. Man erhält allerdings auf diese Art nur solche Curven 3. O., welche durch die imaginären Kreispunkte gehen, allein diese können sehr gut die Stelle allgemeiner Curven 3. O. vertreten. In der That sind die meisten Abbildungen, welche *Plücker* in dem „System der anal. Geom.“ gegeben hat, solche Curven 3. O. (vgl. System d. anal. Geom. pag. 170. Note.)

Man ziehe nun die Strahlen  $m(1, 2, 3, 4, 5)$  und construiere nach [209] den Punct  $x$  so, dass

$$[pqr x](1, 2, 3, 4, 5) \overline{\wedge} m(1, 2, 3, 4, 5)$$

wird; dann ist  $x$  der gesuchte vierte Basispunct. Denn alsdann sind der Kegelschnittbüschel und der Strahlbüschel projectivisch und erzeugen daher die Curve 3. O., welche durch die neun gegebenen Punkte geht.

**257. Aufgabe.** Eine Curve 3. O. zu construiren, wenn 9 Punkte derselben gegeben sind.

**Auflösung 1.** Seien  $abcde fghi$  die gegebenen Punkte. Man construirt zuerst nach [255] den zu irgend vier derselben,  $abcd$ , gegenüberliegenden Punct  $m$ . Dann ist zugleich der dem Kegelschnittbüschel  $[abcd]$  projectivische Strahlbüschel  $[m]$  bestimmt. Man erhält daher beliebig viele Curvenpunkte, wenn man die Durchschnitte beliebiger Strahlen mit den ihnen entsprechenden Kegelschnitten aufsucht. Ist z. B.  $mx$  irgend ein Strahl des Büschels  $[m]$ , und hat man etwa den Tangentenbüschel in  $a$  zur Construction von  $m$  benutzt, so construirt man nach [91] den zu  $mx$  in dem Büschel  $[a]$  entsprechenden Strahl  $ax'$  und bestimmt nach [92] die Durchschnitte der Geraden  $mx$  mit dem Kegelschnitte, welcher durch  $abcd$  geht und  $ax'$  in  $a$  berührt. (*Chasles*. I. c. [255] pag. 951. *Cremona* art. 66.)

**Auflösung 2.** Die gegebenen Punkte seien  $pqr12345m$ . Man ziehe von einem derselben,  $m$ , Strahlen nach fünf anderen,  $1, 2, 3, 4, 5$ , wähle die drei übrigen  $pqr$  als Basispunkte eines mit dem Strahlbüschel  $m(1, 2, 3, 4, 5)$  projectivischen Kegelschnittbüschels und construiere nach [209] den vierten Basispunct  $x$  des letzteren so, dass die Kegelschnitte  $[pqr x](1, 2, 3, 4, 5)$  den Strahlen  $m(1, 2, 3, 4, 5)$  der Reihe nach projectivisch entsprechen; dann erhält man beliebig viele Curvenpunkte, wenn man die Durchschnitte jedes Strahls mit dem ihm entsprechenden Kegelschnitte aufsucht. Man wird daher an den Kegelschnitten  $[pqr x](1, 2, 3, 4, 5)$  die Tangenten in einem der Basispunkte, z. B. in  $p$ , construiren (drei genügen schon um die Projectivität festzusetzen). Ist nun  $mx$  irgend ein Strahl des Büschels  $[m]$ , so construirt

man den diesem entsprechenden  $pz'$  in dem Tangentenbüschel  $[p]$  und sucht nach [92] die Durchschnitte von  $mz$  mit demjenigen Kegelschnitte auf, welcher durch  $pqr x$  geht und  $pz'$  in  $p$  berührt.

**258. Aufgabe.** Wenn eine Curve 3. O. durch neun Punkte gegeben ist, in einem derselben,  $a$ , die Tangente an die Curve zu construiren.

**Auflösung 1.** Man wähle unter den gegebenen Punkten ausser  $a$  noch drei Punkte  $b, c, d$  aus und construire zu diesen nach [255] den gegenüberliegenden Punkt  $m$ . Dadurch erhält man zugleich den Tangentenbüschel  $[a]$  und den ihm projectivischen Strahlenbüschel  $[m]$ . Bestimmt man nun in  $[a]$  nach [91] denjenigen Strahl  $at$ , welcher dem Strahle  $ma$  in  $[m]$  entspricht, so ist  $at$  die verlangte Tangente. — Denn  $at$  ist alsdann die Tangente desjenigen Kegelschnitts, welcher die Curve in  $a$  berührt [238]. (*Chasles*. 1. c. [255] pag. 951.)

**Auflösung 2.** Man wähle unter den gegebenen neun Punkten drei von  $a$  verschiedene  $p, q, r$  aus, und construire nach [256] den Punkt  $x$  so, dass der Kegelschnittbüschel  $[pqr x]$  mit dem Strahlbüschel  $[a]$  die gegebene Curve erzeugt. Bestimmt man nun in dem Letzteren den Strahl  $at$  so, dass er dem Kegelschnitt  $pqr xa$  projectivisch entspricht, was mit Hülfe der Tangenten geschieht, die die Kegelschnitte des Büschels in einem Basispunkt berühren, so ist  $at$  nach [237] die verlangte Tangente.

**259. Aufgabe.** Wenn eine Curve 3. O. durch neun Punkte gegeben ist, so sollen die Durchschnitte derselben mit einer gegebenen Geraden  $G$  bestimmt werden.

**Auflösung.** Man bestimmt mit Hülfe der gegebenen neun Punkte entweder nach [255] oder nach [256] einen Kegelschnittbüschel  $[a b c d]$  und den ihm projectivischen Strahlbüschel  $[m]$ , welche durch die Durchschnitte ihrer entsprechenden Elemente die gegebene Curve erzeugen. Alsdann bilden auf der Geraden  $G$  die Durchschnittpaare  $\mu, \mu'$  der Kegelschnitte des Büschels  $[a b c d]$  eine Involution [115], und die Durchschnitte  $\nu$  der Strahlen des Büschels  $[m]$  eine dieser Involution projectivische Punkteihe. Es kommt nun darauf an, diejenigen Punkte der Geraden  $G$  zu finden, in denen einer

der Punkte  $\mu$  mit dem ihm entsprechenden Punct  $\nu$  zusammenfällt, denn durch einen solchen Punct geht gleichzeitig ein Kegelschnitt des Büschels  $[abcd]$  und der ihm entsprechende Strahl des Büschels  $[m]$ , und daher gehört ein solcher Punct auch der Curve 3. O. an. Zieht man von  $m$  Strahlen nach den Puncten  $\mu, \mu'$ , so erhält man in  $m$  eine Strahleninvolution, deren Paare  $m(\mu, \mu')$  den Strahlen  $m\nu$  projectivisch entsprechen, und man hat nun die Geraden zu finden, in denen einer der Strahlen  $m\mu$  mit dem ihm entsprechenden Strahle  $m\nu$  zusammenfällt. Zu diesem Ende lege man durch  $m$  einen beliebigen Kegelschnitt  $S$  (am einfachsten einen Kreis) und schneide mit demselben die Strahlenpaare  $m(\mu, \mu')$  in den Punctepaaren  $\alpha, \alpha'$ , dann schneiden sich die Verbindungslinien  $\alpha\alpha'$  je zweier Puncte desselben Paares nach [126] in einem Puncte  $p$  und bilden einen Strahlbüschel, dessen Strahlen  $p\alpha\alpha'$  den Paaren  $m(\mu, \mu')$  der Involution nach [127] projectivisch entsprechen. Da nun aber die letztere mit dem Strahlbüschel  $[m]$  projectivisch war, so sind auch die beiden Strahlbüschel  $[p]$  und  $[m]$  projectivisch und  $p\alpha\alpha', m\nu$  entsprechende Strahlen, Diese beiden Strahlbüschel erzeugen nach [85] durch die Durchschnitte ihrer entsprechenden Strahlen einen Kegelschnitt  $K$ , welcher durch  $m$  und  $p$  geht, und da  $m$  schon dem Kegelschnitt  $S$  angehört, diesen letzteren noch in drei Puncten  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$  trifft. Betrachtet man einen dieser Puncte z. B.  $\alpha_1$ , so entsprechen einander, da  $\alpha_1$  auf  $K$  liegt, die Strahlen  $p\alpha_1$  und  $m\alpha_1$  (als eine specielle Lage von  $m\nu$ ); aber da  $\alpha_1$  auch auf  $S$  liegt, so entspricht der Strahl  $p\alpha_1\alpha_1'$  (wo  $\alpha_1'$  den zweiten Durchschnitt von  $p\alpha_1$  mit  $S$  bedeuten möge) auch dem Involutionspaare  $m(\alpha_1, \alpha_1')$  [127], d. h.  $m\alpha_1$  tritt auch als eine specielle Lage von  $m\mu$  auf, mithin fällt auf  $m\alpha_1$  sowohl ein Strahl  $m\mu$ , als auch der ihm entsprechende  $m\nu$ . Da nun das nämliche auch von  $\alpha_2$  und  $\alpha_3$  gilt, so hat man nur die Strahlen  $m(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  zu ziehen, und mit diesen die Gerade  $G$  in  $\mu_1 \mu_2 \mu_3$  zu schneiden, so sind dies die gesuchten Durchschnitte von  $G$  mit der Curve 3. O. (*Charles. Note sur les courbes de 3<sup>me</sup> ordre etc. Comptes rendus. Tome 41. pag. 1194.*)



## §. 4.

**260.** Sind  $abcdefghi$  die neun Durchschnittspunkte zweier Curven 3. O., so geht der Kegelschnitt, welcher durch fünf derselben, z. B.  $efghi$  bestimmt ist, durch die Punkte  $m$  und  $m'$ , welche den vier übrigen  $abcd$  resp. in den beiden Curven 3. O. gegenüberliegen. (Plücker. Alg. Curven. pag. 56.)

Beweis. Die eine Curve 3. O. ist der geometrische Ort der Durchschnitte des Kegelschnittbüschels  $[abcd]$  mit dem Strahlbüschel  $[m]$ , die zweite Curve 3. O. der geometrische Ort der Durchschnitte desselben Kegelschnittbüschels mit dem Strahlbüschel  $[m']$ . Da nun die beiden Strahlbüschel demselben Kegelschnittbüschel projectivisch sind, so sind sie unter einander projectivisch, und daher [85] erzeugen ihre Durchschnitte einen Kegelschnitt  $K$ , der durch  $m, m'$  hindurch geht. Derselbe Kegelschnitt geht aber auch durch die fünf Punkte  $efghi$ . Denn betrachtet man z. B. den durch  $e$  gehenden Kegelschnitt des Büschels  $[abcd]$ , so entspricht diesem sowohl der Strahl  $me$ , als auch der Strahl  $m'e$ , weil  $e$  auf jeder der beiden Curven 3. O. liegt. Daher sind  $me$  und  $m'e$  auch zwei entsprechende Strahlen der Büschel  $[m]$  und  $[m']$ . Mit hin [85] liegt ihr Durchschnitt  $e$  auf dem Kegelschnitte  $K$ . (Cremona. Cve. plane art. 67.)

**261. Aufgabe.** Von zwei Curven 3. O. seien vier gemeinschaftliche Punkte  $abcd$  und ausserdem von jeder noch fünf Punkte gegeben; man soll den Kegelschnitt construiren, welcher durch die übrigen fünf Durchschnitte der beiden Curven 3. O. geht.

Auflösung. Man construiren nach [255] die Punkte  $m, m'$ , welche  $abcd$  in den beiden Curven 3. O. resp. gegenüberliegen. Diese Construction liefert zugleich die beiden nach [260] einander projectivischen Strahlbüschel  $[m]$  und  $[m']$ , deren Durchschnitte den gesuchten Kegelschnitt bestimmen.

**262.** Die Auflösung der vorigen Aufgabe gestaltet sich einfach in dem Falle, wenn die zwei Mal fünf Punkte, welche nebst  $abcd$  die beiden Curven 3. O. bestimmen, und die mit  $\alpha \beta \gamma \delta \epsilon$  und  $\alpha' \beta' \gamma' \delta' \epsilon'$  bezeichnet werden mögen, so

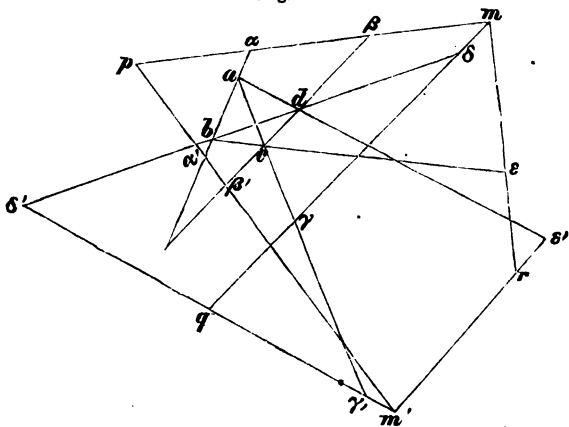
liegen, dass sich jeder auf einer der sechs durch die Punkte  $a b c d$  gehenden Geraden befindet. — Wenn z. B. (Fig. 25) liegt

$$\begin{array}{ll} \alpha, \alpha' & \text{auf } a b \\ \gamma, \gamma' & \text{auf } a c \\ \varepsilon' & \text{auf } a d \end{array} \quad \begin{array}{ll} \beta, \beta' & \text{auf } c d \\ \delta, \delta' & \text{auf } b d \\ \varepsilon & \text{auf } b c \end{array}$$

so erhält man die Punkte  $m, m'$  als die Durchschnitte

$$(\alpha \beta, \gamma \delta) = m \quad (\alpha' \beta', \gamma' \delta') = m',$$

Fig. 25.



denn jetzt sind  $\alpha \beta$  und  $\gamma \delta$  die Durchschnitte der einen Curve und  $\alpha' \beta'$  und  $\gamma' \delta'$  die der anderen Curve mit den aus den Geradenpaaren  $a b, c d$  und  $a c, b d$  bestehenden Kegelschnitten. Da nun diejenigen von  $m$  und  $m'$  ausgehenden Strahlen, welche das nämliche durch  $a b c d$  gehende Geradenpaar in Curvenpunkten durchschneiden, diesem Geradenpaar als einem Kegelschnitt und daher unter sich projectivisch sind, so findet man zur Bestimmung des gesuchten Kegelschnitts ausser  $m$  und  $m'$  noch die Punkte

$$(\alpha \beta, \alpha' \beta') = p \quad (\gamma \delta, \gamma' \delta') = q, \quad (m \varepsilon, m' \varepsilon') = r.$$

**263.** Sind  $a b c d a \beta \gamma \delta$  acht Durchschnitte zweier Curven 3. O.  $u$  und  $v$ , und  $m$  und  $\mu$  die Punkte, welche in  $u$  den Punkten  $a b c d$  und  $a \beta \gamma \delta$  resp. gegenüberliegen, so ist der neunte Durchschnittspunkt  $x$  der beiden Curven  $u, v$ , durch welchen also [219] alle Curven 3. O. hindurchgehen,

die durch die gegebenen acht Punkte gelegt werden können, derjenige Punkt, in welchem die Gerade  $m\mu$  die Curve  $u$  trifft.

**Beweis.** Man kann hier die Curve  $u$  auf doppelte Weise erzeugt denken, einmal durch die Büschel  $[a b c d]$  und  $[m]$ , und dann durch die Büschel  $[\alpha \beta \gamma \delta]$  und  $[\mu]$ . Ist  $x$  nun der neunte Durchschnittspunkt der beiden Curven  $u$  und  $v$ , so geht nach [260] der Kegelschnitt  $\alpha \beta \gamma \delta x$  durch  $m$ , weil  $m$  den Punkten  $a b c d$  in  $u$  gegenüberliegt, und  $\alpha \beta \gamma \delta x$  die fünf übrigen Durchschnitte der beiden Curven  $u$  und  $v$  sind. Dieser Kegelschnitt ist daher zugleich der durch  $m$  gehende des Büschels  $[\alpha \beta \gamma \delta]$ , mithin liegen nach [244. Zus.] seine beiden Durchschnitte  $m, x$  mit der Curve  $u$  in gerader Linie mit  $\mu$ . (*Cremona. Cve. plane art. 67. b. — Hart. Construction by the ruler alone to determine the ninth point of intersection of two curves of the third degree. Cambr. and Dubl. math. Journ. vol. 6. 1851. pag. 181.*)

**264. Aufgabe.** Wenn acht Punkte  $a b c d \alpha \beta \gamma \delta$  gegeben sind, den Punkt  $x$  zu construiren, in welchem sich alle durch die gegebenen Punkte gehenden Curven 3. O. schneiden.

**Auflösung.** Man nehme, um eine der Curven 3. O. zu bestimmen, noch einen neunten Punkt  $k$  beliebig an, etwa den Durchschnitt der Geraden  $ab$  und  $\alpha\beta$ . (Sollten die Punktepaare  $ab$  und  $\alpha\beta$  jedes zufällig auf einem durch  $c d \gamma \delta$  gehenden Kegelschnitte liegen, so würde nach [222]  $k$  schon der gesuchte Punkt  $x$  sein). Mit Hilfe dieses Punktes bestimmt man nach [255] die Punkte  $m$  und  $\mu$ , welche resp.  $a b c d$  und  $\alpha \beta \gamma \delta$  gegenüberliegen. Alsdann hat man den Kegelschnitt des Büschels  $[a b c d]$  aufzusuchen, welcher durch  $\mu$  geht, (oder auch den des Büschels  $[\alpha \beta \gamma \delta]$ , welcher durch  $m$  geht) und den zweiten Durchschnitt desselben mit der Geraden  $m\mu$  zu bestimmen. Dieser ist nach [263] der gesuchte Punkt  $x$ .

**265.** Haben zwei Curven 3. O. in zwei Punkten  $a$  und  $\alpha$  eine vierpunktige Berührung, so liegt ihr neunter Durchschnittspunkt  $x$  auf der Geraden, welche die zweiten Tangentialpunkte von  $a$  und  $\alpha$  verbindet. (Dabei ist es gleichgültig, auf welcher der beiden Curven diese zweiten Tangentialpunkte

genommen werden, der Punct  $x$  ist daher der Durchschnittspunct der beiden so bestimmten Geraden). — Aus [263]; denn fallen  $a b c d$  in  $a$ , und  $\alpha \beta \gamma \delta$  in  $\alpha$  zusammen, so fallen nach [242] die gegenüberliegenden Puncte  $m$  und  $\mu$  in die zweiten Tangentialpuncte von  $a$  und  $\alpha$ . (*Cremona. Cve. plane. art. 67. d.*)

266. Alle Curven 3. O., welche mit einer gegebenen Curve 3. O. in einem Puncte  $a$  eine achtpunctige Berührung haben, schneiden die letztere in dem dritten Tangentialpuncte von  $a$ . — Denn fallen in [265] auch noch  $a$  und  $\alpha$  zusammen, so fällt auch  $\mu$  auf  $m$ ; daher wird die Gerade  $m \mu x$  Tangente in  $m$ , und  $x$  der Tangentialpunct von  $m$ , d. h. [242] der dritte Tangentialpunct von  $a$ . (*Salmon l. c. [242] pag. 540. Cremona. Cve. plane. art. 67. d.*)

### Dritter Abschnitt.

#### Die gerade und die conische Polare eines Punctes.

##### §. 1.

267. Jeder Punct der Ebene hat bezüglich einer Curve 3. O. eine erste Polare, welche ein Kegelschnitt ist, und daher conische Polare heisst; und eine zweite Polare, welche eine Gerade ist, und daher gerade Polare heisst [171]. Bezüglich der Curve  $u = 0$  ist bei veränderlichen  $y$ , die Gleichung der conischen Polare eines Punctes  $x$

$$\Delta_x(u_y) = 0 \quad \text{oder} \quad \Delta_y^2(u_x) = 0,$$

und die Gleichung der geraden Polare des Punctes  $x$

$$\Delta_x^2(u_y) = 0 \quad \text{oder} \quad \Delta_y(u_x) = 0.$$

Daher ist sowohl die conische als auch die gerade Polare jedes Punctes eindeutig bestimmt, nur wenn dieser ein Doppelpunct der Curve 3. O. ist, ist [176] seine gerade Polare ganz unbestimmt, während [181] seine conische Polare aus dem Tangentenpaare in dem Doppelpuncte besteht\*).

\*) Für einen dreifachen Punct einer Curve 3. O. ist auch die conische Polare unbestimmt.

268. Die conische Polare jedes auf der Hesse'schen Curve liegenden Punctes, und nur eines solchen, besteht aus einem Geradenpaare [189], welches das polare Geradenpaar des Punctes genannt werden soll.

269. Die gerade Polare eines auf der Fundamentalcurve liegenden Punctes  $x$  ist die Tangente in diesem Puncte [176]; die conische Polare von  $x$  geht durch diesen Punct und berührt in ihm die Fundamentalcurve [177].

270. Aus jedem Puncte der Ebene gehen sechs Tangenten an eine Curve 3. O. ohne Doppel- oder Rückkehrpunkt, oder diese ist von der sechsten Classe [186]. Hat die Curve einen Doppelpunkt, so ist sie nur von der vierten, und hat sie einen Rückkehrpunkt, von der dritte Classe [188]. In allen Fällen sind die Berührungspuncte Durchschnitte der Curve mit der conischen Polare des Punctes, von welchem aus die Tangenten gelegt sind [182]. Die conische Polare jedes Punctes geht ausserdem durch die Doppel- oder Rückkehrpuncte, falls solche existiren [179], und berührt die Tangente in einem Rückkehrpuncte [180].

271. Die conische Polare eines Wendepunctes besteht aus zwei Geraden, von denen die eine die Wendetangente ist. — Denn der Wendepunct liegt auf der Hesse'schen Curve [155], und ausserdem berührt die conische Polare die Curve in dem Wendepuncte [269].

272. Aus einem Puncte der Curve gehen ausser der Tangente in diesem Puncte selbst noch vier Tangenten an die Curve (wenn ein Doppelpunkt existirt, zwei, bei einem Rückkehrpuncte eine [187, 188]). Ist der Punct aber ein Wendepunct, so gehen nur drei Tangenten an die Curve, weil die conische Polare dann aus der Wendetangente und einer Geraden besteht, die letztere aber die Curve nur in drei Puncten durchschneidet [270, 271]. Als vierte Tangente ist dann die Wendetangente zu betrachten.

273. Geht die gerade Polare eines Punctes  $x$  durch einen Punct  $y$ , so geht die conische Polare von  $y$  durch  $x$ ; und umgekehrt [173].

274. Die gerade Polare eines Punctes  $x$  in Bezug auf eine Curve 3. O. ist zugleich die Polare von  $x$  in Bezug auf den

Kegelschnitt, welcher die conische Polare von  $x$  bezüglich der Curve 3. O. bildet [174].

275. Sind  $A$  und  $B$  die conischen Polaren zweier Punkte  $a$  und  $b$  bezüglich einer Curve 3. O., so ist die Polare des Punktes  $a$  in Bezug auf den Kegelschnitt  $B$  identisch mit der Polare des Punktes  $b$  in Bezug auf den Kegelschnitt  $A$ . — Aus [175] für  $r = 1$  und  $s = 1$ .

Da die Polare eines Punktes in Bezug auf einen Kegelschnitt die Gerade ist, welche die Berührungspunkte der aus jenem Punkte an den Kegelschnitt gelegten Tangenten verbindet [96], so lässt sich dieser Satz auch so aussprechen: Zieht man aus  $a$  die beiden Tangenten an  $B$ , und aus  $b$  die beiden Tangenten an  $A$ , so liegen die vier Berührungspunkte in einer Geraden. Diese Gerade heisst die gemischte gerade Polare der Punkte  $a$  und  $b$ . (*Cremona. Cve. plane. art. 130. b.*)

276. Sei  $B$  die conische Polare eines Punktes  $b$ ,  $C$  die conische Polare eines Punktes  $c$ , und  $a$  ein dritter Punkt. Wenn nun die Polare von  $a$  bezüglich des Kegelschnittes  $B$  durch  $c$  geht, so geht die Polare von  $a$  bezüglich des Kegelschnittes  $C$  durch  $b$ . (*Cremona. Cve. plane. art. 69. d.*)

Beweis. Bei veränderlichen  $y_i$  ist die Gleichung der conischen Polare  $B$  von  $b$  nach [267]

$$B_y = \Delta_b(u_y) = 0,$$

und die der conischen Polare  $C$  von  $c$

$$C_y = \Delta_c(u_y) = 0.$$

Dann ist die Polare von  $a$  bezüglich  $B$  in veränderlichen  $z_i$

$$\Delta_z(B_a) = \Delta_z(\Delta_b(u_a)) = 0,$$

und die Polare von  $a$  bezüglich  $C$

$$\Delta_z(C_a) = \Delta_z(\Delta_c(u_a)) = 0.$$

Geht nun die erstere durch  $c$ , so gilt

$$\Delta_c(\Delta_b(u_a)) = 0.$$

Da aber hieraus nach [3] auch

$$\Delta_b(\Delta_c(u_a)) = 0$$

folgt, so geht die Polare von  $a$  bezüglich  $C$  durch  $b$ .

277. Zieht man durch irgend einen Punkt  $x$  auf einer

Curve 3. O.  $u = 0$  Secanten, welche die Curve in  $z'$  und  $z''$  schneiden, und bestimmt auf jeder den bezüglich  $z'$  und  $z''$  zu  $x$  zugeordneten harmonischen Punkt  $y$ , so ist der geometrische Ort des Punctes  $y$ , wenn die Secante sich um  $x$  dreht, die conische Polare von  $x$ .

Beweis. Sind  $x, y, z$  drei in gerader Linie liegende Puncte, so besteht zwischen ihren Coordinaten [19] die Relation

$$z_i = y_i + \lambda x_i,$$

wo  $\lambda$  eine Constante bedeutet. Liegt  $z$  auf der Curve, so erhält man, wenn man diese Ausdrücke in die Gleichung  $u=0$  substituirt, nach [4]

$$0 = u_y + \lambda \Delta_x(u_y) + \frac{\lambda^2}{2!} \Delta_x^2(u_y) + \frac{\lambda^3}{3!} \Delta_x^3(u_y).$$

Liegt nun  $x$  auch auf der Curve, so verschwindet  $\Delta_x^3(u_y)$ , weil nach [5]  $\Delta_x^3(u_y) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot u_x$ , und  $u_x = 0$  ist. Dadurch verwandelt sich die vorige Gleichung in

$$0 = u_y + \lambda \Delta_x(u_y) + \frac{\lambda^2}{2!} \Delta_x^2(u_y),$$

und die Wurzeln  $\lambda$  derselben gehören den beiden Puncten  $z'$  und  $z''$  an, in welchen die Secante  $xy$  die Curve ausser in  $x$  noch schneidet. Sollen nun aber  $z', z''$  harmonisch zugeordnet sein in Bezug auf  $x, y$ , so müssen nach [25] die beiden Wurzeln  $\lambda$  gleich und entgegengesetzt sein. Dazu ist erforderlich und hinreichend, dass

$$\Delta_x(u_y) = 0$$

ist. Für veränderliche  $y_i$  aber stellt diese Gleichung die conische Polare des Punctes  $x$  dar [267].

278. Hieraus folgt auch sogleich der umgekehrte Satz: Schneidet eine durch einen Curvenpunct  $x$  gelegte Gerade die Curve in  $z', z''$ , und die conische Polare von  $x$  in  $y$ , so sind  $xy, z'z''$  zwei Paare harmonisch zugeordneter Puncte.

279. Ist  $x$  ein Wendepunct, so ist der geometrische Ort der Puncte  $y$ , welche in Beziehung auf die Puncte  $z', z''$ , in denen eine durch  $x$  gehende Gerade die Curve schneidet, zu  $x$  harmonisch zugeordnet sind, eine gerade Linie, welche die harmonische Polare des Wendepunctes heisst. (*Maclaurin*. l. c. [230] pag. 228. *Salmon*. pag. 140. *Cremona*. art. 39. c.) — Denn in

diesem Falle besteht die conische Polare von  $x$  aus der Wendetangente und einer zweiten Geraden [271].

**280.** Mithin: Die conische Polare eines Wendepunctes besteht aus der Wendetangente und der harmonischen Polare des Wendepunctes; und: Die harmonische Polare eines Wendepunctes schneidet die Curve in den Berührungspuncten der drei aus dem Wendepuncte an die Curve gehenden Tangenten [272].

**281.** Ist  $C$  die conische Polare eines Punctes  $c$ , so schneiden sich die geraden Polaren aller auf  $C$  liegenden Puncte  $g$  in dem Puncte  $c$ ; und umgekehrt: Der geometrische Ort aller Puncte  $g$ , deren gerade Polaren sich in einem Puncte  $c$  schneiden, ist ein Kegelschnitt, nämlich die conische Polare von  $c$ . — Denn geht die conische Polare von  $c$  durch  $g$ , so geht die gerade Polare von  $g$  durch  $c$ ; und umgekehrt [273].

**282.** Zu einer conischen Polare  $C$  bezüglich einer Curve 3. O. gehört nur ein einziger Pol  $c$ .

**Beweis.** Sind  $g$  und  $g'$  zwei beliebige auf  $C$  liegende Puncte, so gehen ihre geraden Polaren  $G$  und  $G'$  beide durch  $c$  [273]. Diese beiden Geraden sind durch  $g$  und  $g'$  vollkommen bestimmt [267]. Wäre nun  $C$  gleichzeitig die conische Polare eines andern Puncts  $c'$ , so müssten die Geraden  $G$  und  $G'$  auch durch  $c'$  gehen [273], was im Allgemeinen nicht der Fall ist.

**283.** Nicht jeder Kegelschnitt ist eine conische Polare in Bezug auf eine gegebene Curve 3. O.; sondern damit ein durch fünf Puncte bestimmter Kegelschnitt eine conische Polare sei, ist nothwendig und hinreichend, dass die geraden Polaren dieser fünf Puncte sich in einem Puncte schneiden, welcher dann der Pol der conischen Polare ist. — Aus [281].

**284.** Die conischen Polaren aller Puncte, die auf derselben Geraden liegen, schneiden sich in den nämlichen vier Puncten, bilden daher einen Kegelschnittbüschel. — Aus [193].

**285.** Jede Gerade  $G$  ist eine gerade Polare bezüglich einer gegebenen Curve 3. O.  $u = 0$  und hat als solche vier Pole, d. h. es giebt vier Puncte, welche die Gerade  $G$  gleichzeitig bezüglich  $u$  zur geraden Polare haben. Diese vier Puncte sind die Basispuncte des Kegelschnittbüschels, der



von den conischen Polaren der auf  $G$  liegenden Punkte gebildet wird. — Aus [192].

286. Hat die Curve 3. O. einen Doppelpunct, so hat jede Gerade diesen zum Pol und ausserdem noch drei Pole, da sämtliche conische Polaren durch den Doppelpunct gehen [270], und die gerade Polare des Doppelpuncts unbestimmt ist [267].

Hat die Curve einen Rückkehrpunct, so fallen für jede Gerade  $G$  zwei Pole in den Rückkehrpunct, und die Gerade hat ausserdem noch zwei Pole. Denn sämtliche conische Polaren berühren die Rückkehrtangente in dem Rückkehrpuncte [270], und daher haben die conischen Polaren der auf  $G$  liegenden Punkte ausserdem nur zwei Punkte gemeinsam.

Besteht die Curve 3. O. aus drei Geraden, so hat jede andere Gerade  $G$  ausser den drei Durchschnitten der ersteren nur einen Pol. Denn sämtliche conische Polaren gehen durch die von den Durchschnitten der drei Geraden gebildeten Doppelpuncte [270], und daher haben die conischen Polaren der auf  $G$  liegenden Punkte ausserdem nur noch einen Punkt gemeinsam.

287. Die conischen Polaren aller Punkte der Ebene bezüglich derselben Curve 3. O. bilden ein Kegelschnittnetz. [199].

288. Alle conischen Polaren in Bezug auf dieselbe Curve 3. O., welche durch denselben Punkt  $g$  hindurchgehen, bilden einen Kegelschnittbüschel [197], und die vier Basispunkte des letzteren sind die Pole einer und derselben Geraden. — Denn ist  $G$  die gerade Polare von  $g$ , so liegen die Pole aller durch  $g$  gehenden conischen Polaren auf  $G$  [273], und daher bilden [284] diese einen Büschel, dessen Basispunkte die Pole von  $G$  sind [285].

289. Durch zwei beliebig gewählte Punkte  $g$  und  $g'$  geht im Allgemeinen nur eine einzige conische Polare, nämlich diejenige, deren Pol der Durchschnitt der geraden Polaren von  $g$  und  $g'$  ist. (S. auch [198].) Sind aber  $g$  und  $g'$  zwei Pole derselben Geraden  $G$ , so gehen unendlich viele conische Polaren durch diese Punkte und bilden einen Kegelschnittbüschel, nämlich alle diejenigen, deren Pole auf  $G$  liegen.

## §. 2.

**290.** Die gerade Polare eines Punctes  $a$  in Bezug auf eine aus drei Geraden  $II\ III$ ,  $III\ I$ ,  $I\ II$  bestehende Curve 3. O. schneidet diese Geraden in drei Puncten  $l, m, n$ , welche in Bezug auf die Puncte  $II\ III$ ,  $III\ I$ ,  $I\ II$ , resp. harmonisch zugeordnet sind zu den Puncten  $\alpha, \beta, \gamma$ , in welchen die Geraden  $I\ a$ ,  $II\ a$ ,  $III\ a$  die gegenüberliegenden Seiten des Dreieckes  $I\ II\ III$  treffen. (Fig. 8.)

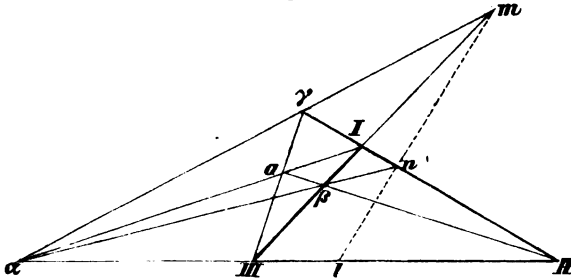
Beweis. Nimmt man  $I\ II\ III$  zum Fundamentaldreieck, so ist die Gleichung der Curve

$$u = x_1 x_2 x_3 = 0.$$

Für veränderliche  $y_i$  ist dann die Gleichung der geraden Polare eines Punctes  $x$  nach [267]

$$\Delta_y(u_x) = x_2 x_3 y_1 + x_3 x_1 y_2 + x_1 x_2 y_3 = 0$$

Fig. 8.



Nennt man also  $a_1 a_2 a_3$  die Coordinaten von  $a$ , und bezeichnet die veränderlichen Coordinaten wieder mit  $x_i$ , so ist die Gleichung der geraden Polare von  $a$

$$a_2 a_3 x_1 + a_3 a_1 x_2 + a_1 a_2 x_3 = 0 \text{ oder } \frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0.$$

Diese Gerade aber hat nach [80] die behauptete Eigenschaft. (Salmon. pag. 149.)

Anmerkung. Liegt der Punct  $a$  auf einer der drei Geraden, z. B. auf  $I\ II$ , d. h. ist  $a_3 = 0$ , so verwandelt sich die Gleichung der geraden Polare in  $x_3 = 0$ ; diese fällt also dann mit der Geraden zusammen, auf welcher  $a$  liegt.

Zusatz. Fallen von den gegebenen Geraden zwei in eine zusammen, so geht die gerade Polare jedes Puncts durch

den Durchschnitt der beiden übrig bleibenden Geraden. — Denn fallen z. B. zwei Gerade mit  $x_2 = 0$  zusammen, und ist die dritte  $x_1 = 0$ , so heisst die Gleichung der Curve  $u = x_1 x_2^2 = 0$ ; daher wird die Gleichung der geraden Polare von  $x$  in veränderlichen  $y_i$ :  $x_2^2 y_1 + 2 x_1 x_2 y_2 = 0$ , also die eines Punctes  $a$  bei veränderlichen  $x_i$

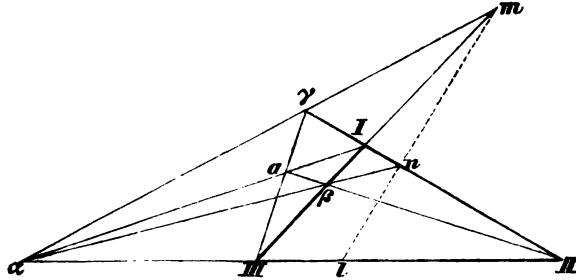
$$a_2 x_1 + 2 a_1 x_2 = 0;$$

diese geht mithin durch den Durchschnitt der Geraden  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 0$ .

**291. Aufgabe.** Die gerade Polare eines gegebenen Puncts  $a$  in Bezug auf eine aus drei Geraden  $II\ III$ ,  $III\ I$ ,  $I\ II$  bestehende Curve 3. O. zu construiren.

**Auflösung.** (Fig. 8.) Man ziehe die Geraden  $Ia$ ,  $IIa$ ,  $IIIa$  und schneide mit ihnen die den Ecken  $I\ II\ III$  gegenüberliegenden Seiten dieses Dreiecks in  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ; man schneide

Fig. 8.



sodann mit den Geraden  $\beta\gamma$ ,  $\gamma\alpha$ ,  $\alpha\beta$  die jedesmalige dritte Seite in  $l$ ,  $m$ ,  $n$ , so liegen diese drei Punkte in einer Geraden, welche die verlangte Polare ist. — Aus [290] in Verbindung mit [80].

**292. Aufgabe.** Zu einer gegebenen Geraden  $A$  in Bezug auf eine aus drei Geraden  $II\ III$ ,  $III\ I$ ,  $I\ II$  bestehende Curve 3. O. den zugehörigen Pol [286] zu construiren. (Fig. 8.)

**Auflösung.** Sind  $l$ ,  $m$ ,  $n$  die Durchschnitte der Geraden  $A$  mit den Seiten  $II\ III$ ,  $III\ I$ ,  $I\ II$ , so bestimme man die zu  $l$ ,  $m$ ,  $n$  in Beziehung auf die Ecken des Dreiecks  $I\ II\ III$  zugeordneten harmonischen Punkte  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  und ziehe  $I\alpha$ ,  $II\beta$ ,  $III\gamma$ , so schneiden sich diese drei Geraden in dem gesuchten Pole  $a$ . (Man braucht natürlich nur einen der drei Punkte

$\alpha, \beta, \gamma$  zu bestimmen, denn hat man z. B.  $\alpha$  bestimmt, so ist  $\beta = (\alpha n, III I)$  und dann  $a = (I\alpha, II\beta)$ . — Aus [290] in Verbindung mit [80].

**293.** Zieht man durch einen Punkt  $a$  zwei Transversalen, welche eine Curve 3. O.  $u = 0$  resp. in den Punkten  $b b' b''$  und  $c c' c''$  schneiden, und zieht ferner die Geraden  $bc, b'c', b''c''$  (wobei diese Punkte in beliebiger Weise combinirt werden können), so ist die gerade Polare des Punktes  $a$  in Bezug auf diese drei Geraden zugleich die gerade Polare von  $a$  bezüglich der Curve  $u$ .

**Beweis.** Aus [172], denn die Geraden  $bc, b'c', b''c''$  bilden eine Curve 3. O., welche die Curve  $u$  so schneidet, dass zwei Mal drei Schnittpunkte  $b b' b''$  und  $c c' c''$  in zwei Geraden liegen, die sich in dem Punkte  $a$  treffen.

**294.** Schneidet eine durch einen Punkt  $a$  gelegte Gerade eine Curve 3. O.  $u = 0$  in  $b, b', b''$ , so ist die gerade Polare von  $a$  in Bezug auf die Curve  $u$  dieselbe wie in Bezug auf die drei Tangenten in den drei Punkten  $b, b', b''$ . — Aus [293], wenn die Geraden  $b b' b''$  und  $c c' c''$  zusammenfallen. (*Salmon.* pag. 150.)

**295. Aufgabe.** Die gerade Polare eines Punktes  $a$  in Bezug auf eine beliebige Curve 3. O. zu construiren, wenn  $a$  nicht auf der Curve liegt.

**Auflösung.** Man ziehe durch  $a$  zwei beliebige Gerade, welche die Curve in  $b b' b''$  und  $c c' c''$  schneiden mögen, ziehe sodann  $bc, b'c', b''c''$  (wobei diese Punkte in beliebiger Art combinirt werden können) und construire nach [291] die gerade Polare von  $a$  in Beziehung auf die drei Geraden  $bc, b'c', b''c''$ , so ist diese zugleich die gesuchte Polare in Beziehung auf die Curve. — Aus [293]. (*Salmon.* pag. 149.) Für den Fall, dass die Curve 3. O. aus einer Geraden und einem Kegelschnitte besteht, s. [304].

**296.** Die conische Polare eines Punktes  $a$  in Bezug auf eine aus drei Geraden  $II III, III I, I II$  bestehende Curve 3. O. ist ein dem Dreieck  $I II III$  umschriebener Kegelschnitt, dessen Tangenten in den Ecken des Dreiecks die gegenüberliegenden Seiten in den Punkten  $l, m, n$  treffen, in welchen

diese Seiten von der geraden Polare von  $a$  in Bezug auf das Dreieck  $I II III$  geschnitten werden.

Beweis. Dass die conische Polare durch die Ecken des Dreiecks  $I II III$  geht, folgt schon daraus, dass diese Punkte Doppelpunkte der Curve 3. O. sind [270]. Nimmt man nun dieses Dreieck als Fundamentaldreieck an, sodass  $u = x_1 x_2 x_3 = 0$  die Gleichung der Curve ist, so ist die Gleichung der conischen Polare eines Punktes  $x$  bei veränderlichen  $y_i$  nach [267]

$$\Delta y^2(u_x) = x_1 y_2 y_3 + x_2 y_3 y_1 + x_3 y_1 y_2 = 0,$$

also die des Punktes  $a$  bei veränderlichen  $x_i$

$$a_1 x_2 x_3 + a_2 x_3 x_1 + a_3 x_1 x_2 = 0.$$

Diese Gleichung stellt aber nach [102] einen Kegelschnitt dar, welcher durch die Ecken des Dreiecks  $I II III$  geht, und dessen Tangenten in den Ecken die gegenüberliegenden Seiten in drei Punkten schneiden, die auf der Geraden  $\frac{x_1}{a_1} + \frac{x_2}{a_2} + \frac{x_3}{a_3} = 0$  liegen, welche nach [290] die gerade Polare von  $a$  ist. (Salmon. pag. 149.)

Bemerkung. Liegt der Punct  $a$  auf einer der drei Geraden z. B. auf  $II III$ , so besteht seine conische Polare aus dieser Geraden  $II III$  und einer zweiten  $Ia$ , welche harmonisch zugeordnet ist zu  $Ia$  in Beziehung auf  $I II$  und  $I III$ . — Denn dann ist  $a_1 = 0$ , und die Gleichung der conischen Polare geht über in  $x_1(a_2 x_3 + a_3 x_2) = 0$ . Die Gerade  $Ia$  hat also die Gleichung  $a_2 x_3 + a_3 x_2 = 0$ , während die Gerade  $Ia$  nach [77] die Gleichung  $a_2 x_3 - a_3 x_2 = 0$  hat. [59].

297. Aufgabe. Die conische Polare eines Punktes  $a$  in Bezug auf ein Dreieck  $I II III$  zu construiren.

Auflösung. Man construire nach [291] die gerade Polare des Punktes  $a$  in Bezug auf das Dreieck  $I II III$  und bezeichne mit  $l, m, n$  die Punkte, in welchen diese die Seiten  $II III$ ,  $III I$ ,  $I II$  schneidet. Alsdann construirt man den Kegelschnitt, welcher durch die Ecken  $I II III$  geht und in diesen die Geraden  $Il$ ,  $IIm$ ,  $IIIn$  berührt. Dieser ist nach [296] die verlangte conische Polare.

298. Jeder einem Dreieck  $I II III$  umschriebene Kegel-

schnitt kann als eine conische Polare bezüglich dieses Dreiecks betrachtet werden.

**Beweis.** Nimmt man zur Bestimmung eines solchen Kegelschnittes zwei Punkte  $g, g'$  beliebig an, und nennt  $G, G'$  deren gerade Polaren in Bezug auf das Dreieck, so geht die conische Polare des Durchschnitts  $c$  dieser beiden Geraden nach [273] durch  $g$  und  $g'$ , und da sie ausserdem nach [296] durch  $I II III$  geht, so fällt sie mit dem gegebenen Kegelschnitt zusammen.

**299. Aufgabe.** Zu einem dem Dreieck  $I II III$  umschriebenen Kegelschnitte, als conische Polare in Bezug auf dieses Dreieck betrachtet, den zugehörigen Pol  $c$  zu construiren.

**Auflösung 1.** Man construirt die Tangenten, welche den Kegelschnitt in den Punkten  $I, II, III$  berühren, und schneidet mit ihnen die Seiten  $II III, III I, I II$  in  $l, m, n$ . Sodann construirt man nach [292] den Pol der Geraden  $lmn$ , so ist dies der verlangte Pol  $c$  [296].

**Auflösung 2.** Sind  $g, g'$  zwei Punkte, welche nebst  $I II III$  den Kegelschnitt bestimmen, so construirt man nach [291] die geraden Polaren von  $g, g'$  in Bezug auf das Dreieck  $I II III$ . Der Durchschnitt derselben ist nach [298] der verlangte Pol.

**300.** Auf das Vorige stützt sich eine andere Auflösung der Aufgabe [124] nämlich: Wenn zwei Kegelschnitte durch je fünf Punkte  $abc ef$  und  $abc e' f'$ , von denen drei,  $abc$ , beiden Kegelschnitten angehören, gegeben sind, den vierten Durchschnittspunkt  $d$  der beiden Kegelschnitte zu construiren.

**Auflösung.** Man betrachte die gegebenen Kegelschnitte nach [298] als zwei conische Polaren in Bezug auf das Dreieck  $abc$ , und construirt nach [299] die ihnen zugehörigen Pole  $p$  und  $p'$ . Construirt man dann nach [292] den zu der Geraden  $pp'$  gehörigen Pol, so ist dies der verlangte Punkt  $d$ .

**Beweis.** Die conischen Polaren aller auf der Geraden  $pp'$  liegenden Punkte schneiden sich [284] in den nämlichen vier Punkten, nämlich [285] in den vier Polen der Geraden  $pp'$ . Drei von diesen sind die Punkte  $abc$ . Da nun  $p$  und  $p'$  die Pole der gegebenen Kegelschnitte sind, so ist der

vierte Pol der Geraden  $pp'$  zugleich der vierte Durchschnitt  $d$  der beiden Kegelschnitte.

**301.** Zieht man durch einen Punkt  $m$  drei Gerade, welche eine gegebene Curve 3. O.  $u$  in den Punkten  $abc$ ,  $a'b'c'$ ,  $a''b''c''$  schneiden, so gehen durch diese neun Punkte unendlich viele Curven 3. O. hindurch [218], und in Bezug auf alle diese ist die conische Polare des Punktes  $m$  dieselbe wie in Bezug auf die Curve  $u$ .

**Beweis.** Die Schnitte der conischen Polare von  $m$  bezüglich  $u$  mit einer der drei Geraden, z. B.  $abc$ , sind nach [168] die harmonischen Centren 2<sup>ten</sup> Grades für den Pol  $m$  und in Bezug auf  $a, b, c$ . Da nun die Schnittpunkte der drei Transversalen  $abc$ ,  $a'b'c'$ ,  $a''b''c''$  mit allen Curven des Büschels 3. O. die nämlichen sind, so sind auch die Schnittpunkte der conischen Polaren von  $m$  bezüglich aller dieser Curven mit jenen Transversalen die nämlichen, und da hiernach die sämtlichen conischen Polaren durch die nämlichen sechs Punkte hindurchgehen, so fallen sie alle mit einem und demselben Kegelschnitte zusammen. (*Salmon. H. pl. Cvs. pag. 150.*)

**302.** Besteht eine Curve 3. O. aus einer Geraden  $A$  und einem Kegelschnitte  $K$ , so schneidet die conische Polare  $C$  eines Punktes  $c$  den Kegelschnitt  $K$  in den vier Punkten  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ , in welchen derselbe getroffen wird: 1) von der Geraden  $A$  (in  $\alpha, \beta$ ), und 2) von der Polare  $P$  von  $c$  in Bezug auf den Kegelschnitt  $K$  (in  $\gamma, \delta$ ).

**Beweis 1.** Die conische Polare  $C$  geht durch  $\alpha, \beta$ , weil dies Doppelpunkte der Curve 3. O. sind [270]. Ausserdem geht sie [270] durch die Berührungspunkte der von  $c$  an die Curve gehenden Tangenten. Diese sind aber in diesem Falle nur die beiden von  $c$  an den Kegelschnitt  $K$  gehenden Tangenten, und deren Berührungspunkte sind [96] die Punkte  $\gamma, \delta$ .

**Beweis 2.** Die Gleichung der Curve ist in diesem Falle

$$u = A \cdot K = 0,$$

und daher die Gleichung der conischen Polare von  $c$  nach [267] bei veränderlichen  $x$

$$C = \Delta_c(u_x) = \Delta_c(A_x K_x) = 0,$$

was sich nach [2] schreiben lässt

$$C = A \Delta_c(K_x) + K \Delta_c(A_x) = Q.$$

Darin ist  $\Delta_c(K_x)$  die Polare  $P$  des Puncts  $c$  in Bezug auf den Kegelschnitt  $K$  [95], und  $\Delta_c(A_x)$  eine Constante, etwa  $k$ , weil  $A$  eine lineare Function ist. Man erhält also

$$C = A \cdot P + k K = 0.$$

Dies aber ist ein Kegelschnitt, welcher durch die Puncte geht, in denen  $K$  von den Geraden  $A$  und  $P$  getroffen wird. (Salmon. H. pl. Cvs. pag. 150.)

**303.** Besteht eine Curve 3. O.  $u$  aus einer Geraden  $A$  und einem Kegelschnitte  $K$ , so geht die gerade Polare  $G$  eines Punctes  $c$  bezüglich  $u$  durch den Punct, in welchem sich die Gerade  $A$  und die Polare  $P$  von  $c$  bezüglich des Kegelschnittes  $K$  schneiden.

Beweis. Die gerade Polare  $G$  von  $c$  bezüglich  $u$  ist [274] zugleich die Polare von  $c$  bezüglich der conischen Polare  $C$ , also ist ihre Gleichung

$$G = \Delta_c(C_x) = 0.$$

Nach [302] aber ist  $C = A P + k K$ , man erhält daher

$$G = \Delta_c(AP + kK)_x = A \Delta_c(P_x) + P \Delta_c(A_x) + k \Delta_c(K_x) = 0.$$

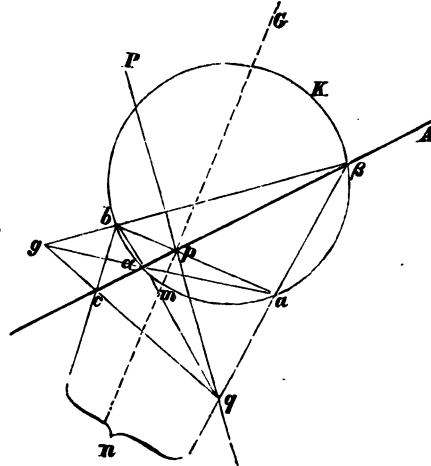
Darin ist  $\Delta_c(K_x) = P$ ,  $\Delta_c(A_x) = k$  und  $\Delta_c(P_x)$  ebenfalls eine Constante, etwa  $l$ ; demnach wird

$G = l A + 2k P = 0$ ,  
und dies ist eine Gerade,  
welche durch den Durchschnitt von  $A$  und  $P$  geht.

**304. Aufgabe.** Die gerade Polare  $G$  eines Punctes  $g$  in Bezug auf eine Curve 3. O., welche aus einer Geraden  $A$  und einem Kegelschnitte  $K$  besteht, zu construiren.

**Auflösung.** Wenn die Gerade  $A$  den Kegelschnitt  $K$  in  $\alpha$  und  $\beta$  schneidet, so ziehe man (Fig. 26)  $g\alpha$  und  $g\beta$ , schneide damit

Fig. 26.

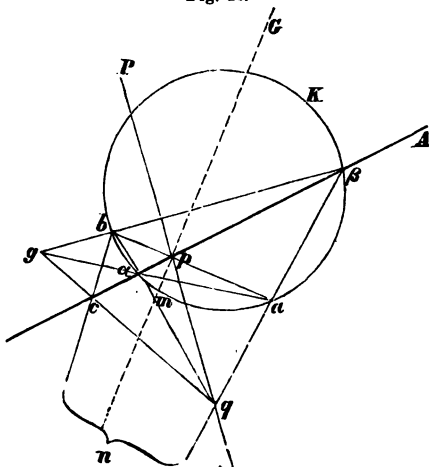




den Kegelschnitt  $K$  in  $a$  und  $b$ , und suche die Schnittpunkte  $(\alpha\beta, ab) = p$  und  $(\alpha b, a\beta) = q$ . Dann ist  $pq$  die Polare  $P$  von  $g$  in Bezug auf den Kegelschnitt  $K$ . Bestimmt man dann den zu  $pab$  in Beziehung auf  $p\alpha\beta$  und  $pq$  zugeordneten harmonischen Strahl  $p mn$ , so ist dieser die verlangte gerade Polare  $G$ .

Beweis. Verfährt man nach [295], indem man  $g b \beta$  und  $g a \alpha$  als die beiden Transversalen betrachtet, so liegen

Fig. 26.



sowohl in  $\alpha$ , als auch in  $\beta$  zwei Durchschnitte derselben mit der Curve 3. O. vereinigt. Combinirt man nun diese Punkte so zu drei Geraden, dass man  $\alpha, \alpha, \alpha$  resp. mit  $\beta, b, \beta$  verbindet, so erhält man  $\alpha \beta q$  als das Dreieck, in Bezug auf welches nach [293] die gerade Polare von  $g$  dieselbe ist, wie in Bezug auf die Curve 3. O. Um nun die gerade Polare von  $g$  in Bezug auf  $\alpha \beta q$  nach [291] zu construiren,

hat man von  $g$  nach den Ecken  $\alpha, \beta, q$  drei Geraden zu ziehen, welche die gegenüberliegenden Seiten resp. in  $a, b, c$  schneiden, sodann mit den Geraden  $ab, bc, ca$  die jedesmalige dritte Seite in  $p, n, m$  zu schneiden, dann ist  $p mn$  die verlangte gerade Polare  $G$ . Hiedurch bestätigt sich zunächst [303], dass  $G$  durch den Durchschnitt  $p$  von  $A$  und  $P$  geht. Da aber nun nach [290]  $b m \alpha q$  vier harmonische Punkte sind und ebenso  $a n \beta q$ , so sind  $p(b m \alpha q)$  oder, was dasselbe ist,  $p(a n \beta q)$  vier harmonische Strahlen.

Wenn die Gerade  $A$  den Kegelschnitt  $K$  nicht schneidet, so erleidet die Auflösung in [295] keine wesentliche Vereinfachung.

**305. Aufgabe.** Wenn eine Curve 3. O. aus einer Geraden  $A$  und einem Kegelschnitte  $K$  besteht, die conische Polare  $C$  eines gegebenen Punktes  $g$  zu construiren.

**Auflösung.** Man construire die Polare  $P$  von  $g$  in Bezug auf  $K$  und nach [304] oder [295] die gerade Polare  $G$  von  $g$  in Bezug auf die Curve 3. O. Wird dann  $K$  von  $A$  in  $\alpha, \beta$  und von  $P$  in  $\gamma, \delta$  geschnitten, so ist die gesuchte conische Polare  $C$  nach [302] ein Kegelschnitt, welcher durch  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  geht, und für den die Gerade  $G$  die Polare von  $g$  ist [274]. Man muss nun unterscheiden, ob die vier Punkte  $\alpha \beta \gamma \delta$  alle, oder nur zwei von ihnen, oder keiner reell ist.

I. Sind alle vier Punkte  $\alpha \beta \gamma \delta$  reell, so verbinde man, um einen fünften Punkt des gesuchten Kegelschnitts zu finden,  $g$  mit einem dieser Punkte z. B.  $\alpha$ , schneide mit dieser Geraden die Polare  $G$  in  $g'$  und bestimme den zu  $\alpha$  in Bezug auf  $g, g'$  zugeordneten harmonischen Punkt  $\alpha'$ , so ist der durch  $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha'$  gehende Kegelschnitt die gesuchte conische Polare  $C$  [95].

II. Wenn von den beiden Punktepaaren  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  nur das eine z. B.  $\alpha, \beta$  reell ist (sind  $\gamma, \delta$  reell, so ist die Construction dieselbe), so kann man zunächst auf die eben angegebene Art zwei neue Punkte  $\alpha', \beta'$  des gesuchten Kegelschnittes finden. (Hat man  $\alpha'$ , so kann man  $\beta'$  auch dadurch finden, dass man bestimmt  $(\alpha\beta, G) = p, (\alpha'p, g\beta) = \beta'$ ). Um den noch fehlenden fünften zu erhalten, bemerke man, dass die Kegelschnitte  $K, C$  und das Geradenpaar  $A, P$  einem Büschel angehören, welcher die Punkte  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  (von denen allerdings nur zwei reell sind) zu Basispunkten hat, und dass sie daher von einer beliebigen Transversale in conjugirten Punktepaaren einer Involution geschnitten werden [115]. Man ziehe demnach durch  $\alpha'$  (oder auch durch  $\beta'$ ) eine beliebige Gerade, welche  $K$  in  $k, k'$  und  $A, P$  in  $h, h'$  schneidet und construire nach [117] in der durch  $kk', hh'$  bestimmten Involution den zu  $\alpha'$  conjugirten Punkt  $\alpha''$ , so gehört dieser dem Kegelschnitt  $C$ , der gesuchten conischen Polare an, welche nun durch die fünf Punkte  $\alpha, \beta, \alpha', \beta', \alpha''$  bestimmt ist.

III. Wenn keine der beiden Geraden  $A$  und  $P$  den Kegelschnitt  $K$  schneidet, so kann man sich auf folgende Art die zur Construction des Kegelschnitts  $C$  nöthigen Punkte verschaffen. Man lege durch  $g$  eine beliebige Gerade, welche  $A, P$  in  $h, h', K$  in  $k, k'$  und  $G$  in  $g'$  schneide, und bezeichne die unbekannten Durchschnitte dieser Geraden mit dem Kegel-

schnitte  $C$  durch  $x, y$ . Construirt man dann nach [75] die Doppelpuncte  $e, f$  der durch  $hh', kk'$  bestimmten Involution, so sind  $e, f$  harmonisch zu  $x, y$ , weil die letzteren zu derselben Involution gehören (S. II). Aber  $x, y$  sind auch harmonisch zu  $g, g'$ , weil  $G$  die Polare von  $g$  in Bezug auf  $C$  ist [95]; man findet also  $x, y$ , wenn man die Punkte sucht [75], die  $e, f$  und  $g, g'$  gleichzeitig harmonisch trennen. Indem man diese Construction bei drei verschiedenen durch  $g$  gehenden Geraden ausführt, erhält man sechs Punkte des gesuchten Kegelschnittes  $C$ . Es wird in den meisten Fällen vorthellhaft sein, dazu die drei Geraden zu wählen, welche den Geraden  $A, P, G$  parallel sind. Diese schneiden allemal den Kegelschnitt  $K$ , wenn  $P$  ihn nicht schneidet.

**306. Aufgabe.** Die conische Polare eines Punktes  $c$  in Bezug auf eine beliebige gegebene Curve 3. O.  $u$  zu construiren, wenn  $c$  nicht auf  $u$  liegt.

**Auflösung.** Man schneide die Curve mit einer beliebigen Geraden  $A$  in  $a, a', a''$ , ziehe  $ca, ca', ca''$  und schneide mit diesen Geraden die Curve in  $bd, b'd', b''d''$ . Dann liegen die letztern sechs Punkte nach [225] in einem Kegelschnitt  $K$ . Construirt man nun nach [305] die conische Polare von  $c$  in Bezug auf die aus der Geraden  $A$  und dem Kegelschnitt  $K$  bestehende Curve 3. O., so ist das die gesuchte conische Polare. — Denn die neun Durchschnitte  $abd, a'b'd', a''b''d''$  der beiden Curven 3. O.  $u$  und  $(A, K)$  liegen auf drei in  $c$  zusammenlaufenden Geraden, und daher [301] ist die conische Polare von  $c$  in Bezug auf  $(A, K)$  identisch mit der in Bezug auf  $u$ . (Salmon. H. pl. Cvs. pag. 150.)

**307. Aufgabe.** Die conische Polare eines Punktes  $c$  in Bezug auf eine beliebige Curve 3. O.  $u$  zu construiren, wenn  $c$  auf  $u$  liegt.

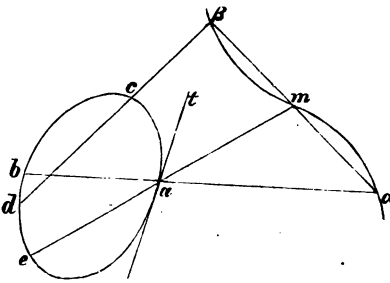
**Auflösung.** Man ziehe aus  $c$  vier Strahlen, welche die Curve  $u$  in den Punktepaaren  $ab, a'b', a''b'', a'''b'''$  schneiden, und bestimme auf jedem Strahl den in Bezug auf  $ab$  etc. zu  $c$  zugeordneten harmonischen Punkt  $h$ . Der Kegelschnitt, welcher durch die fünf Punkte  $h, h', h'', h'''$  und  $c$  geht, ist die gesuchte conische Polare. — Aus [277].

**308. Aufgabe.** An eine gegebene Curve 3. O. in einem gegebenen Punkte  $a$  die Tangente zu construiren.

**Auflösung 1.** Man construirt nach [307] die vier Punkte  $h, h', h'', h'''$ , welche mit  $a$  die conische Polare von  $a$  bestimmen, und an diesen Kegelschnitt die Tangente in  $a$ , so ist diese nach [269] die verlangte Tangente.

**Auflösung 2.** (Fig. 27.) Ziehe durch  $a$  zwei beliebige Gerade, welche die Curve resp. in  $b, \alpha$  und  $e, m$  schneiden, schneide die Curve ferner mit  $\alpha m$  in  $\beta$ , und mit einer beliebigen durch  $\beta$  gehenden Geraden in  $c$  und  $d$ ; construirt man dann an den durch  $a b c d e$  gehenden Kegelschnitt die Tangente  $at$  in  $a$ , so ist dies zugleich die verlangte Tangente an der Curve.

Fig. 27.



**Beweis.** Betrachtet man  $a b c d$  als Basispunkte eines Kegelschnittbüschels und das Geradenpaar  $ab, cd$  als einen Kegelschnitt desselben, so ist nach [240]  $m$  der den vier Punkten  $a b c d$  gegenüberliegende Punkt. Alsdann ist der durch  $e$  gehende Kegelschnitt des Büschels der dem Strahl  $mae$  entsprechende, und daher [238] berührt derselbe die Curve in  $a$ . (Mittheilung von Herrn Prof. Küpper). Vgl. auch [258].

**309. Aufgabe.** Aus einem gegebenen Punkte  $m$  alle Tangenten an eine Curve 3. O. zu construiren.

**Auflösung.** Man construirt nach [306] oder [307] die conische Polare des Punktes  $m$ , so sind die Durchschnitte derselben mit der Curve die Berührungspunkte der von  $m$  an die Curve gehenden Tangenten [270].

**310. Aufgabe.** In einem Punkte  $m$  einer Curve 3. O. den Krümmungskreis zu construiren.

**Auflösung.** Man schneide die Curve mit einer beliebigen Geraden in  $a, a', a''$ , und mit den Geraden  $ma, ma', ma''$  in  $b, b', b''$ . Construirt ferner nach [308] in  $m$  die Tangente  $mt$  an der Curve, und dann in  $m$  den Krümmungskreis desjenigen Kegelschnittes, welcher durch  $b, b', b''$  geht und die Gerade  $mt$  in  $m$  berührt, so ist dieser Krümmungskreis

der verlangte. — Denn nach [232] hat der erwähnte Kegelschnitt in  $m$  mit der Curve eine dreipunctige Berührung.

#### Vierter Abschnitt.

##### Die Poloconik (conische Polare) einer Geraden.

###### §. 1.

311. Die Einhüllende der geraden Polaren (bezüglich einer Curve 3. O.  $u = 0$ ) aller Punkte  $y$ , welche auf einer Geraden  $G$  liegen, ist ein Kegelschnitt und heisst die Poloconik (*Cremona* art. 136) oder die conische Polare der Geraden  $G$  (*Salmon* pag. 151.), er soll im Folgenden mit  $\Pi_g$  bezeichnet werden.\*) Ist

$$(1) \quad a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = 0$$

die Gleichung der Geraden, so ist die Gleichung ihrer Poloconik

$$\Pi_g = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ a_2 & u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ a_3 & u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Beweis. Die Gleichung der geraden Polare  $P$  eines Punktes  $y$  ist bei veränderlichen  $x_i$  nach [267]

$$\Delta_y^2(u_x) = 0$$

oder ausgeschrieben

$$(2) \quad P = y_1^2 u_{11} + y_2^2 u_{22} + y_3^2 u_{33} + 2 y_2 y_3 u_{23} \\ + 2 y_3 y_1 u_{31} + 2 y_1 y_2 u_{12} = 0.$$

Ändert nun  $y$  seine Lage längs der Geraden (1), so findet man die Einhüllende seiner geraden Polaren, wenn man die Verhältnisse der  $y_i$  der Gleichung (1) gemäss als Functionen eines veränderlichen Parameters  $c$  betrachtet, und  $c$  aus den Gleichungen

\*) Bei *Cayley* (Memoir on Curves of the third order. Phil. Trans. vol. 147. pag. 416) heisst dieser Kegelschnitt die Lineopolar-Envelope der Geraden.

$$P = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial P}{\partial c} = 0$$

eliminiert. Zu diesem Zwecke setze man

$$\frac{y_1}{y_3} = p \quad \frac{y_2}{y_3} = q,$$

ziehe aus  $P$  den gemeinschaftlichen Factor  $y_3^2$  heraus und schreibe das Resultat

$$P = y_3^2 P'(p, q);$$

dann ist

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial P}{\partial y_1} = y_3^2 \frac{\partial P'}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial y_1} = y_3 \frac{\partial P'}{\partial p} \\ \frac{\partial P}{\partial y_2} = y_3^2 \frac{\partial P'}{\partial q} \frac{\partial q}{\partial y_2} = y_3 \frac{\partial P'}{\partial q} \end{cases}$$

Führt man  $p$  und  $q$  auch in (1) ein, so wird diese Gleichung

$$a_1 p + a_2 q + a_3 = 0.$$

Betrachtet man nun  $p$  und  $q$  als Functionen von  $c$  und differentiirt die Gleichung  $P' = 0$  und die vorige nach  $c$ , so erhält man

$$\begin{aligned} \frac{\partial P'}{\partial p} \frac{dp}{dc} + \frac{\partial P'}{\partial q} \frac{dq}{dc} &= 0 \\ a_1 \frac{dp}{dc} + a_2 \frac{dq}{dc} &= 0, \end{aligned}$$

und hieraus folgt

$$\frac{\partial P'}{\partial p} : \frac{\partial P'}{\partial q} = a_1 : a_2$$

und daher auch wegen (3)

$$\frac{\partial P}{\partial y_1} : \frac{\partial P}{\partial y_2} = a_1 : a_2$$

oder mit Anwendung eines Proportionalitätsfactors  $2\varrho$

$$(4) \quad \frac{\partial P}{\partial y_1} = 2\varrho a_1 \quad \frac{\partial P}{\partial y_2} = 2\varrho a_2.$$

Differentiirt man aber (1) und (2) nach  $c$ , indem man  $y_1, y_2, y_3$  als Functionen von  $c$  betrachtet, so erhält man

$$\begin{aligned} a_1 \frac{dy_1}{dc} + a_2 \frac{dy_2}{dc} + a_3 \frac{dy_3}{dc} &= 0 \\ \frac{\partial P}{\partial y_1} \frac{dy_1}{dc} + \frac{\partial P}{\partial y_2} \frac{dy_2}{dc} + \frac{\partial P}{\partial y_3} \frac{dy_3}{dc} &= 0. \end{aligned}$$

Darin verwandelt sich die zweite Gleichung durch Anwendung von (4) in

$$2\varrho a_1 \frac{dy_1}{dc} + 2\varrho a_2 \frac{dy_2}{dc} + \frac{\partial P}{\partial y_3} \frac{dy_3}{dc} = 0$$

und zeigt dann durch Vergleichung mit der ersten, dass auch

$$\frac{\partial P}{\partial y_3} = 2\varrho a_3$$

ist. Man hat also

$$(5) \quad \frac{\partial P}{\partial y_1} : \frac{\partial P}{\partial y_2} : \frac{\partial P}{\partial y_3} = a_1 : a_2 : a_3,$$

oder wenn man diese Differentialquotienten bildet, die drei Gleichungen

$$u_{11} y_1 + u_{12} y_2 + u_{13} y_3 = \varrho a_1$$

$$u_{21} y_1 + u_{22} y_2 + u_{23} y_3 = \varrho a_2$$

$$u_{31} y_1 + u_{32} y_2 + u_{33} y_3 = \varrho a_3.$$

Eliminirt man aus diesen und  $P = 0$  die  $y_i$ , so erhält man die Gleichung der gesuchten Einhüllenden. Aber da  $P$  in Beziehung auf die  $y_i$  homogen vom zweiten Grade ist, so ist nach dem *Euler'schen Satze*

$$2P = y_1 \frac{\partial P}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial P}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial P}{\partial y_3} = 0,$$

und in Folge von (5) verwandelt sich diese Gleichung in

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = 0;$$

man kann daher die  $y_i$  auch aus dieser und den obigen drei Gleichungen eliminiren und erhält dann als Gleichung der Poloconik

$$\begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & a_1 \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & a_2 \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

indem  $-\varrho$  als gemeinschaftlicher Factor der Elemente der letzten Columnne auftritt und daher weggelassen werden kann. Eine einfache Umstellung verwandelt diese Determinante in die obige.

**312.** Die gerade Polare des Durchschnittspunctes  $m$  zweier Geraden  $G$ ,  $G'$  ist eine gemeinschaftliche Tangente an den Poloconiken dieser beiden Geraden. — Denn da  $m$  sowohl auf  $G$  als auch auf  $G'$  liegt, so berührt seine gerade Polare sowohl die Poloconik von  $G$ , als auch die von  $G'$  [311].

**313.** Berührt eine Gerade  $G$  die Curve 3. O.  $u = 0$  in einem Punkte  $x$ , so berührt auch die Poloconik von  $G$  die Curve in dem nämlichen Punkte, sodass  $G$  in  $x$  gemeinschaftliche Tangente an der Curve und an der Poloconik von  $G$  ist. (*Salmon pag. 151.*)

**Beweis.** Die Gerade  $G$  hat mit der Curve in  $x$  zwei Punkte gemeinschaftlich,  $x$  und  $x'$ . Die geraden Polaren von  $x$  und  $x'$  aber sind die Tangenten an der Curve in  $x$  und  $x'$  [269] und zugleich Tangenten an der Poloconik von  $G$  [311]. Da sie ferner ebenso wie  $x$  und  $x'$  zusammenfallen, so liegt der Berührungspunct der letzteren in  $x$  [187].

**314.** Bestimmt man für jeden Punct  $y$  einer Geraden  $G$  die conische Polare bezüglich einer Curve 3. O. (diese Kegelschnitte bilden einen Büschel [284]), und nimmt für jeden dieser Punkte die Polare bezüglich der zugehörigen conischen Polare, so ist die Einhüllende dieser Geraden die Poloconik von  $G$ . — Denn die Polare eines Punctes  $y$  bezüglich der conischen Polare von  $y$  ist zugleich die gerade Polare von  $y$  bezüglich der Curve [274]; daher kommt man wieder auf [311] zurück.

**315.** Bestimmt man für jeden Punct einer Geraden  $G$  die conische Polare bezüglich einer Curve 3. O. und nimmt in Bezug auf jeden dieser Kegelschnitte den Pol der Geraden  $G$ , so ist der geometrische Ort dieser Pole die Poloconik von  $G$ . (*Cremona art. 136.*)

**Beweis.** Die Gleichung (2)  $P = 0$  in [311] stellt bei veränderlichen  $y_i$  die conische Polare eines Punctes  $x$  dar [267]. Nimmt man an, dass dieser auf der Geraden  $G$  liegt, also der Gleichung

$$(1) \quad a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

genügt, so erhält man den Pol  $y$  dieser Geraden bezüglich des Kegelschnittes  $P = 0$  nach [97] aus den Gleichungen

$$\frac{\partial P}{\partial y_1} : \frac{\partial P}{\partial y_2} : \frac{\partial P}{\partial y_3} = a_1 : a_2 : a_3,$$

die man mit Hülfe eines Proportionalitätsfactors  $\rho$  schreiben kann



$$\begin{aligned}
 & u_{11} y_1 + u_{12} y_2 + u_{13} y_3 = \varrho a_1 \\
 (2) \quad & u_{21} y_1 + u_{22} y_2 + u_{23} y_3 = \varrho a_2 \\
 & u_{31} y_1 + u_{32} y_2 + u_{33} y_3 = \varrho a_3.
 \end{aligned}$$

Eliminirt man hieraus und aus (1) die  $x_i$ , so erhält man die Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes in veränderlichen  $y_i$ . Allein die vorigen Gleichungen bleiben vollständig ungeändert, wenn man in ihnen die  $y_i$  mit den  $x_i$  vertauscht. Denn nach [1] kann man z. B. bei der ersten dieser Gleichungen schreiben:

$$u_{11} y_1 + u_{12} y_2 + u_{13} y_3 = \Delta_y \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right).$$

Da aber  $\frac{\partial u}{\partial x_1}$  vom zweiten Grade ist, so hat man nach [5] die Identität

$$\Delta_y \left( \frac{\partial u}{\partial x_1} \right) = \Delta_x \left( \frac{\partial u}{\partial y_1} \right),$$

d. h. dieser Ausdruck bleibt ungeändert, wenn darin die  $x_i$  mit den  $y_i$  vertauscht werden. Setzt man daher auch in (1) die  $y_i$  statt der  $x_i$ , so wird man den gesuchten geometrischen Ort auch erhalten und zwar in veränderlichen  $x_i$ , wenn man die  $y_i$  aus den Gleichungen (2) und aus  $a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = 0$  eliminirt. Dieses aber ist die in [311] ausgeführte Operation, welche die Gleichung der Poloconik von  $G$  lieferte. (*Salmon*. pag. 152.)

## §. 2.

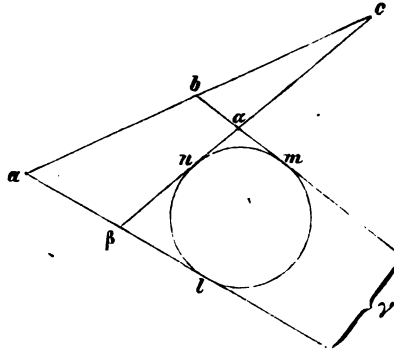
**316.** Ist  $a$  ein Punkt der Geraden  $G$ ,  $C_a$  die conische Polare von  $a$ , und  $a'$  der Pol von  $G$  bezüglich  $C_a$ , so ist  $a'$  zugleich der Punkt, in welchem die gerade Polare von  $a$  die Poloconik von  $G$  berührt. — Denn die gerade Polare von  $a$  ist zugleich Polare von  $a$  bezüglich  $C_a$  [274], geht also durch  $a'$  [100]; aber  $a'$  liegt auf der Poloconik [315], und die gerade Polare von  $a$  berührt die letztere [311], also muss  $a'$  der Berührungspunkt sein.

**317.** Der geometrische Ort der Mittelpunkte derjenigen Kegelschnitte, welche die conischen Polaren der unendlich fernen Punkte bilden, ist ein Kegelschnitt, nämlich die Poloconik der unendlich fernen Geraden. — Aus [315], denn die

unendlich fernen Punkte liegen auf einer Geraden [16], und der Pol der unendlich fernen Geraden in Bezug auf jeden Kegelschnitt ist dessen Mittelpunkt. (*Salmon. pag. 152.*)

318. Sind  $a b c$  die Punkte, in welchen eine Gerade  $G$  die Curve 3. O. trifft, und schneiden sich die in diesen Punkten an die Curve gelegten Tangenten in  $\alpha \beta \gamma$ , so ist die Poloconik von  $G$  ein dem Dreieck  $\alpha \beta \gamma$  eingeschriebener Kegelschnitt, so zwar dass die Berührungspunkte  $l, m, n$  den Punkten  $a, b, c$  in Bezug auf die Ecken  $\beta \gamma, \gamma \alpha, \alpha \beta$  des Tangentendreieckes harmonisch zugeordnet sind. (Fig. 28.)

Fig. 28.



Beweis. Die geraden Polaren von  $a, b, c$  sind die Tangenten  $a \beta \gamma, b \gamma \alpha, c \alpha \beta$  [269]; diese berühren also die Poloconik [311]. Nimmt man ausserdem das Tangentendreieck zum Fundamentaldreieck  $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$ , so hat die gerade Polare  $P$  eines auf der Geraden  $G$  liegenden Punktes  $y$  in Bezug auf das Tangentendreieck und daher [294] auch in Bezug auf die Curve nach [290] die Gleichung

$$P = \frac{x_1}{y_1} + \frac{x_2}{y_2} + \frac{x_3}{y_3} = 0.$$

Ist nun

$$a_1 y_1 + a_2 y_2 + a_3 y_3 = 0$$

die Gleichung der Geraden  $G$ , so erhält man nach [311] die Gleichung der Poloconik, wenn man bildet

$$a_1 : a_2 : a_3 = \frac{\partial P}{\partial y_1} : \frac{\partial P}{\partial y_2} : \frac{\partial P}{\partial y_3} = \frac{x_1}{y_1^2} : \frac{x_2}{y_2^2} : \frac{x_3}{y_3^2}$$

und hieraus und aus  $P = 0$  die  $y_i$  eliminirt. Man erhält aber

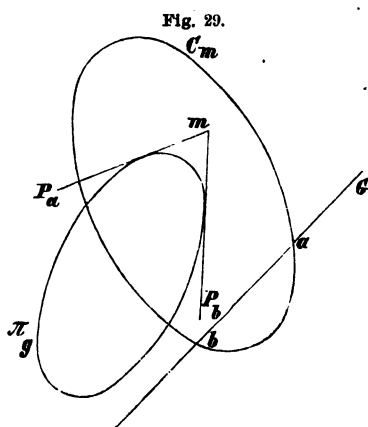
$$y_1 = q \sqrt{\frac{x_1}{a_1}}, \quad y_2 = q \sqrt{\frac{x_2}{a_2}}, \quad y_3 = q \sqrt{\frac{x_3}{a_3}};$$

und dies in  $P = 0$  substituirt giebt

$$\sqrt{a_1 x_1} + \sqrt{a_2 x_2} + \sqrt{a_3 x_3} = 0.$$

Dieses aber ist nach [103] ein Kegelschnitt, welcher dem Fundamentaldreieck so eingeschrieben ist, wie der Satz aussagt. (Salmon. pag. 153.)

**319.** Die Poloconik  $\Pi_\infty$  der unendlich fernen Geraden ist der Kegelschnitt, welcher dem von den Asymptoten gebildeten Dreieck eingeschrieben ist und die Seiten desselben in deren Mitten berührt. — Aus [318], denn wenn  $a, b, c$  ins Unendliche rücken, so werden  $a\beta\gamma, b\gamma\alpha, c\alpha\beta$  die Asymptoten und  $l, m, n$  bilden die Mitten von  $\beta\gamma, \gamma\alpha, \alpha\beta$ . (Salmon. pag. 153.)



**320.** Die von einem Punkte  $m$  an die Poloconik  $\Pi_g$  einer Geraden  $G$  gehenden Tangenten sind die geraden Polaren  $P_a, P_b$  derjenigen Punkte  $a, b$ , in welchen die Gerade  $G$  die conische Polare  $C_m$  von  $m$  schneidet. (Fig. 29.)

Beweis. Die geraden Polaren von  $a$  und  $b$  sind Tangenten an der Poloconik  $\Pi_g$  [311]. Da aber die conische Polare  $C_m$  von  $m$  durch  $a$  und  $b$  geht, so gehen  $P_a$  und  $P_b$

beide durch  $m$  [273].

Zusatz. Hieraus folgt, dass von einem Punkte  $m$  zwei reelle oder imaginäre Tangenten an die Poloconik von  $G$  gehen, je nachdem die conische Polare von  $m$  von der Geraden  $G$  in zwei reellen oder imaginären Punkten getroffen wird; und umgekehrt. (Salmon. pag. 153.)

**321.** Berührt eine Gerade  $G$  (Fig. 29) die conische Polare  $C_m$  eines Punktes  $m$  in  $a$  (allgemeiner, hat  $C_m$  mit  $G$  zwei in  $a$  zusammenfallende Punkte gemein), so geht die Poloconik  $\Pi_g$  von  $G$  durch  $m$ , und die gerade Polare von  $a$  berührt die Poloconik in  $m$  (allgemeiner, hat in  $m$  mit der Poloconik zwei zusammenfallende Punkte gemein). Und umgekehrt: Liegt ein Punkt  $m$  auf der Poloconik  $\Pi_g$  einer Geraden  $G$ , so berührt die conische Polare von  $m$  die Gerade  $G$  in einem Punkte  $a$ , dessen gerade Polare die Tangente in  $m$  an der Poloconik ist.

— Aus [320], wenn  $b$  mit  $a$  und daher auch  $P_b$  mit  $P_a$  zusammenfällt.

**322.** Hieraus folgt: Die Poloconik einer Geraden  $G$  ist der geometrische Ort der Punkte, deren conische Polaren die Gerade  $G$  berühren. (*Cremona. art. 136.*) Und: Die conische Polare eines Puncts  $m$  ist die Einhüllende der Geraden, deren Poloconiken durch  $m$  hindurchgehen. (*Cremona. art. 136. a.*)

**323.** Geht die Poloconik einer Geraden  $G$  durch zwei Punkte  $m$  und  $m'$ , so ist  $G$  eine gemeinschaftliche Tangente an den conischen Polaren von  $m$  und  $m'$ . Und umgekehrt: Ist  $G$  eine gemeinschaftliche Tangente an den conischen Polaren zweier Punkte  $m$  und  $m'$ , so geht die Poloconik von  $G$  durch  $m$  und  $m'$  hindurch. — Aus [321].

**324.** Durch die nämlichen zwei Punkte  $m$  und  $m'$  gehen vier Poloconiken, nämlich diejenigen, deren zugehörige Geraden die vier gemeinschaftlichen Tangenten der conischen Polaren von  $m$  und  $m'$  sind. [323.]

**325.** Die conische Polare eines Punctes  $m$  ist eine Ellipse, Hyperbel oder Parabel, je nachdem  $m$  innerhalb, ausserhalb oder auf dem Kegelschnitte  $\Pi_\infty$  liegt, der die Seiten des Asymptotendreiecks in deren Mitten berührt. (Dabei soll ein Punct  $m$  innerhalb oder ausserhalb eines Kegelschnitts liegend genannt werden, je nachdem von ihm zwei imaginäre oder reelle Tangenten an den Kegelschnitt gehen.)

**Beweis.** Der Kegelschnitt  $\Pi_\infty$  ist die Poloconik der unendlich fernen Geraden [319]. Je nachdem von  $m$  zwei imaginäre, reelle oder zusammenfallende Tangenten an  $\Pi_\infty$  gehen, schneidet die unendlich ferne Gerade die conische Polare von  $m$  in zwei imaginären, reellen, oder zusammenfallenden Puncten [320]. (*Salmon. pag. 153.*)

**326.** Hat eine Curve 3. O. einen Doppelpunct, so liegt derselbe, je nachdem er ein eigentlicher Doppelpunct, ein isolirter Punct oder ein Rückkehrpunct ist, ausserhalb, innerhalb oder auf dem Kegelschnitte  $\Pi_\infty$ , welcher die Seiten des Asymptotendreiecks in deren Mitten berührt. — Denn die conische Polare des Doppelpuncts ist das Tangentenpaar in diesem [267]. Das letztere aber ist in den drei erwähnten Fällen reell, imaginär oder zusammenfallend [153] und wird

daher von der unendlich fernen Geraden in zwei reellen, imaginären oder zusammenfallenden Punkten geschnitten. Der Doppelpunct liegt also nach [320, 325] in den drei Fällen ausserhalb, innerhalb oder auf der Poloconik der unendlich fernen Geraden. (*Plücker*. System der anal. Geom. pag. 196. *Salmon*. pag. 153.)

### §. 3.

**327.** Wenn die Poloconik einer Geraden  $G$  aus zwei Geraden besteht, die sich in  $m$  schneiden, so besteht die conische Polare von  $m$  aus zwei Geraden, von denen die eine  $G$  ist.

Beweis. Da die geraden Polaren aller Punkte von  $G$  die Poloconik berühren d. h. in zwei zusammenfallenden Punkten schneiden, [311], so gehen sie in diesem Falle alle durch  $m$  hindurch, dann aber geht nach [273] die conische Polare von  $m$  durch alle Punkte von  $G$ ; d. h. diese Gerade bildet einen Theil der conischen Polare von  $m$ .

**328.** Bildet eine Gerade  $G$  einen Theil der conischen Polare  $C_m$  eines Punktes  $m$ , so besteht die Poloconik von  $G$  aus zwei Geraden, die sich in dem Pole  $m$  von  $C_m$  schneiden.

Beweis. Man kann in diesem Falle die Gerade  $G$  in jedem ihrer Punkte als eine Tangente an der conischen Polare  $C_m$  von  $m$  betrachten. Dann aber müssen nach [321] die geraden Polaren aller Punkte von  $G$  die Poloconik  $\Pi$ , in zwei in  $m$  zusammenfallenden Punkten schneiden, und daher muss diese Poloconik aus zwei sich in  $m$  treffenden Geraden bestehen.

**329.** Daraus folgt: Die Poloconiken der beiden Geraden  $G$  und  $G'$ , welche zusammen die conische Polare eines Punktes  $m$  bilden, bestehen aus zwei Geradenpaaren die in  $m$  ihren gemeinschaftlichen Schnittpunkt haben. — Ueber die nähere Bestimmung dieser Poloconiken s. [530].

**330.** Da der geometrische Ort aller Punkte  $m$ , deren conische Polaren aus Geradenpaaren bestehen nach [268] die Hesse'sche Curve ist, so folgt ferner, dass diese Curve auch der geometrische Ort der Doppelpunkte aller aus Geradenpaaren bestehenden Poloconiken ist.

## Fünfter Abschnitt.

## Die gemischte Poloconik zweier Geraden.

331. Nimmt man zu jedem Punkte einer Geraden  $G$  die conische Polare bezüglich einer Curve 3. O.  $u = 0$ , und bestimmt in Bezug auf jeden dieser Kegelschnitte den Pol einer anderen Geraden  $G'$ , so ist der geometrische Ort dieser Pole ein Kegelschnitt. Sind

$$G = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 = 0$$

und

$$G' = a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 = 0$$

die Gleichungen der Geraden  $G$  und  $G'$ , so ist

$$(1) \quad \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ a'_1 & u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ a'_2 & u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ a'_3 & u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} = 0$$

die Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes.

Beweis. Die conische Polare  $C$  eines Punktes  $x$  hat in veränderlichen  $y_i$  nach [267] die Gleichung

$$C = u_{11}y_1^2 + u_{22}y_2^2 + u_{33}y_3^2 + 2u_{23}y_2y_3 + 2u_{31}y_3y_1 + 2u_{12}y_1y_2 = 0.$$

Man erhält die Coordinaten des Pols  $y$  der Geraden  $G'$  in Bezug auf  $C$  nach [97] aus den Gleichungen

$$\frac{\partial C}{\partial y_1} : \frac{\partial C}{\partial y_2} : \frac{\partial C}{\partial y_3} = a'_1 : a'_2 : a'_3$$

d. i., wenn  $\varrho$  einen Proportionalitätsfactor bedeutet,

$$u_{11}y_1 + u_{12}y_2 + u_{13}y_3 = \varrho a'_1$$

$$u_{21}y_1 + u_{22}y_2 + u_{23}y_3 = \varrho a'_2$$

$$u_{31}y_1 + u_{32}y_2 + u_{33}y_3 = \varrho a'_3$$

Eliminirt man hieraus und aus  $G = 0$  die Coordinaten  $x_i$ , so ergibt sich die Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes in veränderlichen  $y_i$ . Da aber die vorigen Gleichungen nach [315] ungeändert bleiben, wenn man darin die  $x$  mit den  $y$  vertauscht, so kann man ebensogut auch die  $y_i$  eliminiren, wenn man die Gleichung  $G = 0$  in der Form

$$a_1y_1 + a_2y_2 + a_3y_3 = 0$$

schreibt, und erhält dann den gesuchten geometrischen Ort in veränderlichen  $x_i$  ausgedrückt. Diese Elimination ergibt mit Unterdrückung des gemeinschaftlichen Factors —  $\varrho$  die obige Gleichung (1).

**332.** Lässt man im Vorigen die beiden Geraden  $G$  und  $G'$  ihre Rolle mit einander vertauschen, so erhält man den nämlichen geometrischen Ort wieder. Denn, um die Gleichung des neuen geometrischen Ortes zu erhalten, hat man in der vorigen Determinante nur  $a_1, a_2, a_3$  resp. mit  $a'_1, a'_2, a'_3$  zu vertauschen. Da aber  $u_{hk} = u_{kh}$  ist, so besteht der Effect dieser Vertauschung nur darin, dass die Zeilen und Columnen der Determinante mit einander vertauscht sind, wobei dieselbe vollständig ungeändert bleibt.

**333.** Demnach ist der betrachtete Kegelschnitt der geometrische Ort der Pole irgend einer von zwei Geraden  $G$  und  $G'$ , bezüglich der Kegelschnitte, welche die conischen Polaren der Punkte der anderen Geraden bilden. Dieser Kegelschnitt heisst die gemischte Poloconik der Geraden  $G$  und  $G'$  (*Cremona. art. 136. c.*) und soll mit  $\Pi_{gg'}$  bezeichnet werden. Fallen diese beiden Geraden in eine  $G$  zusammen, so verwandelt sich die gemischte Poloconik in die Poloconik der Geraden  $G$ , wie aus [315] folgt, oder auch daraus, dass die Determinante in [331] in die von [311] übergeht, wenn  $a'_1, a'_2, a'_3$  resp. gleich  $a_1, a_2, a_3$  sind.

**334.** Jedem Punkte  $a$  auf der Geraden  $G$  (oder auch  $a'$  auf  $G'$ ) entspricht ein bestimmter Punkt  $m$  auf der gemischten Poloconik  $\Pi_{gg'}$ ; aber auch umgekehrt: jedem Punkte  $m$  auf  $\Pi_{gg'}$  entspricht ein bestimmter Punkt  $a$  auf  $G$ , und ein bestimmter  $a'$  auf  $G'$ ; und zwar sind  $a$  und  $a'$  die Pole von resp.  $G'$  und  $G$  bezüglich der conischen Polare  $C_m$  des Punktes  $m$ .

**Beweis.** Aus  $a$  erhält man  $m$  folgendermassen: Man bestimme die conische Polare  $C_a$  von  $a$  und in Bezug auf diese den Pol  $m$  von  $G'$ ; dadurch ist  $m$  vollkommen bestimmt. Nimmt man aber für den Punkt  $m$  die conische Polare  $C_m$ , so muss  $a$  der Pol von  $G'$  in Bezug auf  $C_m$  sein, denn nach [275] ist die Polare von  $a$  in Bezug auf  $C_m$  identisch mit der Polare von  $m$  in Bezug auf  $C_a$ ; wenn also  $m$  der Pol von  $G'$  in Bezug auf  $C_a$  ist, so ist  $a$  der Pol von  $G'$  in Bezug auf

$C_m$ . Demnach ist  $a$  auf  $G$  durch eindeutige Operationen aus  $m$  auf  $\Pi_{gg'}$  bestimmt. Ebenso erhält man  $a'$  auf  $G'$  als Pol von  $G$  in Bezug auf  $C_m$ .

**335.** Hieraus folgt: Die conischen Polaren  $C_m$  der auf der gemischten Poloconik  $\Pi_{gg'}$  zweier Geraden  $G, G'$  liegenden Punkte  $m$  haben die Eigenschaft, dass in Beziehung auf sie die Geraden  $G$  und  $G'$  conjugirte Geraden sind, d. h. dass jede durch den Pol der anderen (in Beziehung auf die betreffende conische Polare) hindurchgeht.

**336.** Und umgekehrt: Sind  $G$  und  $G'$  in Beziehung auf eine conische Polare  $C_m$  conjugirte Geraden, so liegt der Pol  $m$  (bezüglich der Curve 3. O.) dieser conischen Polare auf der gemischten Poloconik von  $G, G'$ . — Denn ist  $a$  der Pol von  $G'$  bezüglich  $C_m$ , so ist  $m$  gleichzeitig der Pol von  $G'$  in Bezug auf  $C_a$  [275], und liegt  $a$  auf  $G$ , so liegt  $m$  auf  $\Pi_{gg'}$  [331].

**337.** Mithin: Die gemischte Poloconik zweier Geraden  $G, G'$  ist der geometrische Ort der Pole (bezüglich der Curve 3. O.) derjenigen conischen Polaren, in Bezug auf welche  $G$  und  $G'$  conjugirte Geraden sind. (*Cremona* art. 136. c)

**338.** Sei  $\alpha$  der Durchschnitt der Geraden  $G, G'$ . Die gemischte Poloconik  $\Pi_{gg'}$  geht durch die beiden Punkte  $\mu, \mu'$  hindurch, in denen die gerade Polare  $P_\alpha$  von  $\alpha$  die beiden gewöhnlichen Poloconiken von  $G$  und  $G'$  berührt [312].

**Beweis.** Da der Punct  $\alpha$  gleichzeitig auf beiden Geraden  $G$  und  $G'$  liegt, so gehören ihm zwei Punkte der gemischten Poloconik  $\Pi_{gg'}$  zu [334]. Man findet den einen,  $\mu$ , wenn man die conische Polare  $C_\alpha$  von  $\alpha$  aufsucht, und, indem man  $\alpha$  als auf  $G$  liegend betrachtet, den Pol von  $G'$  in Bezug auf  $C_\alpha$  nimmt. Allein da  $\alpha$  auch zugleich auf  $G'$  liegt, so liegt der so bestimmte Punct  $\mu$  nach [316] auch auf der (gewöhnlichen) Poloconik von  $G'$  und ist der Punct, in dem diese von der geraden Polare von  $\alpha$  berührt wird. Ebenso ergibt sich der andere Punct  $\mu'$  als Pol der Geraden  $G$  bezüglich  $C_\alpha$ , und ist dann gleichzeitig derjenige Punct der Poloconik von  $G$ , in welchem diese von der geraden Polare von  $\alpha$  berührt wird. (*Cremona* art. 136. d.)



## Sechster Abschnitt.

## Wendepunkte, Wendetangenten, harmonische Polaren.

## §. 1.

**339.** Die Hesse'sche Curve  $H(u) = 0$  einer Curve 3. O.  $u=0$  ist wieder eine Curve 3. O. [152<sup>a</sup>], welche die ursprüngliche Curve in ihren Wendepunkten durchschneidet und ausserdem durch die Doppel- und Rückkehrpunkte geht, falls solche existiren [156]. Eine Curve 3. O. ohne Doppel- oder Rückkehrpunkt hat daher neun Wendepunkte, und durch diese können unendlich viele Curven 3. O. gelegt werden [218]. Hat die Curve einen Doppelpunkt, so besitzt sie drei Wendepunkte, und hat sie einen Rückkehrpunkt, nur einen Wendepunkt [167]. Jede einfache Curve 3. O. hat daher mindestens einen reellen Wendepunkt.

**340.** Bildet eine Gerade einen Theil der Curve  $u = 0$ , so bildet sie auch einen Theil der Hesse'schen Curve  $H(u) = 0$  [166]. Besteht daher die Curve  $u = 0$  aus drei Geraden, so besteht ihre Hesse'sche Curve aus den nämlichen drei Geraden. Hievon macht aber der Fall eine Ausnahme, wenn die drei Geraden sich in einem Punkte schneiden; dann ist die Hesse'sche Curve unbestimmt. Denn nimmt man zwei dieser Geraden zu Seiten  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$  des Fundamentaldreiecks, so hat die dritte die Gleichung  $x_1 + \lambda x_2 = 0$ , und die Gleichung der Curve ist  $u = x_1 x_2 (x_1 + \lambda x_2) = 0$ . Bildet man nun die Hesse'sche Determinante  $H(u)$  [152<sup>a</sup>], so verschwinden in ihr die Elemente  $u_{13}$ ,  $u_{23}$ ,  $u_{33}$ , und folglich ist  $H(u)$  selbst identisch Null.\*)

**341.** Die harmonische Polare eines Wendepuncts  $w$  ist nach [279] diejenige Gerade, welche die Punkte  $h$ ,  $h'$ ,  $h''$ , etc. verbindet, die zu  $w$  harmonisch zugeordnet sind in Beziehung auf die Punkte  $ab$ ,  $a'b'$ ,  $a''b''$ , etc., in denen beliebige durch

---

\*) Das identische Verschwinden der Hesse'schen Determinante ist überhaupt die Bedingung, dass eine Curve aus Geraden besteht, die in einem Punkte zusammenlaufen (Hesse. Ueber die Bedingung etc. Crelle's Journ. Bd. 42. pag. 123) Vgl. auch [84].

$w$  gelegte Secanten die Curve schneiden. Die Berührungspuncte der drei aus  $w$  an die Curve gehenden Tangenten liegen daher auch auf dieser Geraden.

342. Zieht man durch einen Curvenpunct  $w$  drei Secanten  $wab$ ,  $wa'b'$ ,  $wa''b''$ , und liegen die in Bezug auf  $ab$ ,  $a'b'$ ,  $a''b''$  resp. zu  $w$  zugeordneten harmonischen Puncte  $h$ ,  $h'$ ,  $h''$  in einer Geraden, so ist  $w$  ein Wendepunct, und daher die Gerade  $hh'h''$  die harmonische Polare von  $w$ . (*Salmon Lettre à l'éditeur. Crelle's Journ. Bd. 39. pag. 365.*)

Beweis. Wäre  $w$  nicht ein Wendepunct, so würden die Puncte  $h$ ,  $h'$ ,  $h''$  nach [277] auf einem Kegelschnitte, nämlich der conischen Polare von  $w$ , liegen, und diese könnte nicht aus zwei Geraden bestehen [268], weil  $w$  nicht auf der Hesse'schen Curve liegt.

343. Sind  $wab$  und  $wa'b'$  zwei Secanten durch einen Wendepunct, so liegen die Schnittpuncte der Geraden  $aa'$ ,  $bb'$  und  $ab'$ ,  $a'b$  auf der harmonischen Polare von  $w$ . (*Maclaurin l. c. [230] pag. 232.*) — Denn die Verbindungslinie dieser Schnittpuncte trifft die Secanten  $wab$  und  $wa'b'$  in den zu  $w$  zugeordneten harmonischen Puncten (Siehe u. a. *Schröter. Steiner's Vorlesungen §. 9.*)

344. Ist  $wab$  eine Secante durch einen Wendepunct  $w$ , so schneiden sich die Tangenten in  $a$  und  $b$  auf der harmonischen Polare von  $w$ . — Aus [343], wenn  $a'$  mit  $a$ , und  $b'$  mit  $b$  zusammenfällt. (*Maclaurin l. c. [230] pag. 232.*)

345. Legt man durch einen Wendepunct  $w$  drei Secanten  $wab$ ,  $wa'b'$ ,  $wa''b''$ , so liegen die sechs Puncte  $ab$ ,  $a'b'$ ,  $a''b''$ , auf einem Kegelschnitt. — Aus [225], da in dem Wendepuncte drei in gerader Linie liegende Curvenpuncte vereinigt sind. (*Serret Alg. sup. II. pag. 586. Cremona art. 39. c.*)

346. Wenn die sechs Puncte  $ab$ ,  $a'b'$ ,  $a''b''$ , in welchen drei durch einen Curvenpunct  $w$  gelegte Secanten die Curve schneiden, in einem Kegelschnitte liegen, so ist  $w$  ein Wendepunct der Curve. — Denn da die drei Geraden  $wab$ ,  $wa'b'$ ,  $wa''b''$  eine Curve 3. O. bilden, und sechs ihrer Schnittpuncte mit der gegebenen Curve 3. O. auf einem Kegelschnitte liegen, so befinden sich die drei in  $w$  vereinigten Schnittpuncte nach [220] in einer Geraden. (*Serret Alg. sup. II. pag. 586.*)

**347.** Sind  $a, a', a''$  drei in gerader Linie liegende Curvenpuncte, und zieht man durch sie und durch einen Wendepunct  $w$  drei Gerade, welche die Curve in  $b, b', b''$  treffen, so liegen diese drei Puncte ebenfalls in einer Geraden, und die Geraden  $aa'a''$  und  $bb'b''$  treffen sich auf der harmonischen Polare von  $w$ . — Aus [345]; denn liegen von den sechs Puncten des Kegelschnitts  $ab, a'b', a''b''$  drei in einer Geraden, so haben die übrigen drei dieselbe Eigenschaft. Das übrige folgt aus [343]. (*Cremona* art. 39. c.)

**348.** Schneidet eine durch einen Wendepunct  $w$  gezogene Gerade die Curve in  $a$  und  $b$ , so giebt es einen Kegelschnitt, welcher die Curve sowohl in  $a$  als auch in  $b$  dreipunctig berührt. — Denn lässt man in [345] die drei Geraden  $wab, wa'b', wa''b''$  in  $wab$  zusammenfallen, so hat der durch  $ab, a'b', a''b''$  gehende Kegelschnitt sowohl in  $a$  als auch in  $b$  drei Puncte mit der Curve gemein. *Poncelet*. Analyse des transversales. Crelle's Journ. Bd. 8. pag. 134. *Cremona* art. 39. d.)

**349.** Und ebenso folgt aus [346]: Wenn ein Kegelschnitt eine Curve 3. O. in zwei Puncten  $a$  und  $b$  dreipunctig berührt, so trifft die Gerade  $ab$  die Curve in einem Wendepuncte.

**350.** Ist  $a$  der Berührungspunct einer aus einem Wendepuncte an die Curve gezogenen Tangente, so giebt es einen Kegelschnitt, welcher die Curve in  $a$  sechspunctig berührt. — Aus [348], wenn  $a$  und  $b$  zusammenfallen. (*Cremona* art. 39. d.)

**351.** Es giebt auf einer Curve 3. O. 27 Puncte, in denen sie eine sechspunctige Berührung mit einem Kegelschnitte hat; nämlich die Berührungspuncte der 27 aus den 9 Wendepuncten an die Curve gehenden Tangenten. — Aus [350]; und dieses sind die einzigen Puncte von der erwähnten Eigenschaft, denn sobald ein Punct diese Eigenschaft besitzt, so ist sein Tangentialpunct nach [349] ein Wendepunct. (*Steiner*. Geometrische Lehrsätze. Crelle's Journ. Bd. 32. pag. 182.)

## §. 2.

**352.** Die Gerade, welche zwei Wendepuncte einer Curve 3. O. verbindet, trifft die Curve allemal in einem dritten Wendepuncte. (*Maclaurin* l. c. [230] pag. 231. *Salmon*, pag. 46. *Cremona* art. 139. b.)

Beweis 1. Zieht man durch zwei Wendepunkte  $w, w'$  je eine Gerade, welche die Curve in resp.  $ab$  und  $a'b'$  treffen, und schneidet dann die Curve mit den Geraden  $ww', aa', bb'$  in  $w'' a'' c''$ , so liegen die drei letzten Punkte nach [229] ebenfalls in einer Geraden. Dreht man nun die Geraden  $ab$  und  $a'b'$  um  $w$  und  $w'$  herum, bis sie Tangenten an der Curve werden, so fallen  $a$  und  $b$  beide in  $w$ , und  $a', b'$  in  $w'$  hinein, weil  $w$  und  $w'$  Wendepunkte sind. Demnach fallen die Geraden  $aa'a''$  und  $bb'b''$  beide mit  $ww'w''$  zusammen, und folglich auch die Punkte  $a'', b''$  mit  $w''$ . Die Gerade  $w''a''b''$  hat also dann in  $w''$  drei zusammenfallende Punkte mit der Curve gemein, sie ist daher eine Wendetangente und  $w''$  ein Wendepunkt, denn der nach [212] ebenfalls mögliche Fall, dass  $w''$  ein Doppelpunkt wäre, kann hier nicht stattfinden, weil dann die Gerade  $ww'w''$  vier Punkte mit der Curve gemein hätte. (*Serret. Alg. sup. II. pag. 580.*)

Beweis 2. Bedeuten  $A, B, C, D$  lineare Ausdrücke, und  $k$  eine Constante, so kann die Gleichung einer Curve 3. O. auf die Form

$$A B C - k D^3 = 0$$

gebracht werden, weil man dabei über neun Constanten verfügen kann. Alsdann trifft die Gerade  $A=0$  die Curve in drei zusammenfallenden Punkten da, wo sie von der Geraden  $D=0$  getroffen wird. Dasselbe gilt von den Geraden  $B=0$  und  $C=0$ , folglich sind diese drei Geraden Wendetangenten, und ihre Durchschnitte mit der Curve, d. h. die Wendepunkte liegen in der Geraden  $D=0$ . Von diesen Durchschnitten kann keiner ein Doppelpunkt sein, weil sonst die Gerade  $D=0$  vier Punkte mit der Curve gemein hätte. (*Salmon pag. 136.*)

Beweis 3. Lässt man in [347] die drei in gerader Linie liegenden Punkte  $aa'a''$  zusammenfallen, so entsteht ein Wendepunkt; dann fallen auch die Punkte  $bb'b''$  in einen Wendepunkt zusammen (*Salmon pag. 140.*)

**353.** Die neun Wendepunkte einer Curve 3. O. liegen zu je drei in zwölf Geraden, von denen durch jeden Wendepunkt vier hindurchgehen. Diese zwölf Geraden theilen sich in vier Gruppen zu je drei Geraden, von der Art, dass in

jeder Gruppe alle neun Wendepuncte enthalten sind. (*Plücker. System der analytischen Geom. pag. 284.*)

**Beweis.** Da eine durch zwei Wendepuncte gezogene Gerade jedesmal noch einen dritten Wendepunct enthält [352], so kann man durch jeden Wendepunct vier Gerade legen, welche die acht übrigen Wendepuncte enthalten. Man erhält dadurch 36 Gerade, von denen aber jede drei Wendepuncte enthält und daher dreimal gezählt ist. Von diesen 36 Geraden sind demnach 12 untereinander verschieden, und von diesen zwölf gehen durch jeden Wendepunct vier. Sind nun etwa 1, 2, 3 drei in einer Geraden liegende Wendepuncte, so kann man durch jeden dieser Punkte ausser der Geraden 123 nur noch drei Gerade ziehen. Man erhält demnach nur zehn Gerade, von denen jede mindestens einen der drei Punkte 1, 2, 3 enthält. Es bleiben also noch zwei Gerade übrig, die durch keinen dieser Punkte gehen. Eine von diesen beiden Geraden enthält daher drei der übrigen sechs Wendepuncte, und da die neun Wendepuncte die Durchschnitte zweier Curven 3. O. sind [339], so müssen nach [224] die drei letzten ebenfalls in einer Geraden liegen. Wenn man also von einer der vier Geraden ausgeht, welche durch einen bestimmten Wendepunct gehn, so gelangt man auf die eben angegebene Art zu einer Gruppe von drei Geraden, welche alle Wendepuncte enthalten; und folglich giebt es vier solcher Gruppen. (*Serret. Alg. sup. II. pag. 581.*)

**354.** Man übersieht die Vertheilung der neun Wendepuncte auf die zwölf Geraden in einfacher Weise, wenn man die Gleichung der Curve 3. O. auf die Form

$$\lambda^3 A^3 + \mu^3 B^3 + \nu^3 C^3 - 3k ABC = 0$$

bringt, worin  $A, B, C$  lineare Ausdrücke, und  $k, \lambda, \mu, \nu$  Constanten bedeuten. Dies ist immer möglich, weil man über neun Constanten verfügen kann. Setzt man darin der Einfachheit wegen  $A, B, C$  für resp.  $\lambda A, \mu B, \nu C$ , und  $k$  für  $\frac{k}{\lambda \mu \nu}$ , so reducirt sich die vorige Gleichung auf

$$(1) \quad A^3 + B^3 + C^3 - 3k ABC = 0,$$

und diese lässt sich in folgenden drei Formen schreiben

$$k^3 A^3 + B^3 + C^3 - 3k ABC = (k^3 - 1) A^3$$

$$A^3 + k^3 B^3 + C^3 - 3k ABC = (k^3 - 1) B^3$$

$$A^3 + B^3 + k^3 C^3 - 3k ABC = (k^3 - 1) C^3.$$

Bedeutet nun  $\alpha$  eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit, so können die linken Theile dieser Gleichungen nach [10] in lineare Factoren zerlegt werden; man erhält dadurch

$$(kA+B+C)(kA+\alpha B+\alpha^2 C)(kA+\alpha^2 B+\alpha C) = (k^3-1)A^3$$

$$(A+kB+C)(\alpha^2 A+kB+\alpha C)(\alpha A+kB+\alpha^2 C) = (k^3-1)B^3$$

$$(A+B+kC)(\alpha A+\alpha^2 B+kC)(\alpha^2 A+\alpha B+kC) = (k^3-1)C^3.$$

Jede dieser Gleichungen hat die in [352] betrachtete Form; daher ist jede der drei Geraden  $A, B, C$  die Verbindungslinie dreier Wendepuncte (*Salmon. pag. 136*), und die links stehenden neun linearen Factoren stellen, gleich Null gesetzt, die neun Wendetangenten dar. Die Wendepuncte sind nun die Durchschnitte der Geraden  $A, B, C$  mit den Wendetangenten, also folgende Durchschnitte:

$$A=0 \text{ mit } kA+B+C=0, kA+\alpha B+\alpha^2 C=0, kA+\alpha^2 B+\alpha C=0$$

$$B=0 \text{ „ } A+kB+C=0, \alpha^2 A+kB+\alpha C=0, \alpha A+kB+\alpha^2 C=0$$

$$C=0 \text{ „ } A+B+kC=0, \alpha A+\alpha^2 B+kC=0, \alpha^2 A+\alpha B+kC=0.$$

Daraus folgt aber, dass dieselben Puncte auch als die Durchschnitte folgender Geraden dargestellt werden können:

$$(2) \begin{cases} A=0 \text{ mit } B+C=0, B+\alpha C=0, \alpha B+C=0 \\ B=0 \text{ „ } C+A=0, C+\alpha A=0, \alpha C+A=0 \\ C=0 \text{ „ } A+B=0, A+\alpha B=0, \alpha A+B=0. \end{cases}$$

Nimmt man nun die Geraden  $A, B, C$  als Seiten des Fundamentaldreieckes an, und bezeichnet die Wendepuncte dem vorigen Schema gemäss der Reihe nach mit 1, 2, 3, . . . 9, so werden die Coordinaten derselben folgenden Werthen proportional

$$(3) \begin{cases} 1) 0, +1, -1 & 2) 0, +\alpha, -1 & 3) 0, +1, -\alpha \\ 4) -1, 0, +1 & 5) -1, 0, +\alpha & 6) -\alpha, 0, +1 \\ 7) +1, -1, 0 & 8) +\alpha, -1, 0 & 9) +1, -\alpha, 0; \end{cases}$$

und dann ergibt sich, dass von den neun Wendepuncten drei, nämlich 1, 4, 7, reell, die übrigen sechs aber imaginär

sind. Von den zwölf Geraden, welche durch die Wendepuncte gehen, erhalten wir sofort vier, nämlich

$$A = 1\ 2\ 3 \quad B = 4\ 5\ 6 \quad C = 7\ 8\ 9$$

und ausserdem 1 4 7, weil die Determinante der neun Coordinaten dieser drei Punkte verschwindet [18]. Man könnte ebenso, indem man zusieht, von welchen Punkten die Determinante der Coordinaten Null wird, die noch übrigen Geraden finden. Man gelangt aber zu diesen auch durch eine andere Betrachtung, welche sofort die Gleichungen derselben liefert. Schreibt man nämlich die Gleichung (1) in folgenden Formen

$$(4) \quad \begin{cases} A^3 + B^3 + C^3 - 3\,ABC = 3\,(k-1)\,ABC \\ A^3 + B^3 + C^3 - 3\,\alpha\,ABC = 3\,(k-\alpha)\,ABC \\ A^3 + B^3 + C^3 - 3\,\alpha^2\,ABC = 3\,(k-\alpha^2)\,ABC, \end{cases}$$

so kann man die linken Theile nach [10] wieder in lineare Factoren zerlegen und erhält

$$\begin{aligned} (A+B+C)(A+\alpha B+\alpha^2 C)(A+\alpha^2 B+\alpha C) &= 3\,(k-1)\,ABC \\ \alpha^2(\alpha A+B+C)(A+\alpha B+C)(A+B+\alpha C) &= 3\,(k-\alpha)\,ABC \\ \alpha(\alpha^2 A+B+C)(A+\alpha^2 B+C)(A+B+\alpha^2 C) &= 3\,(k-\alpha^2)\,ABC. \end{aligned}$$

Nun wissen wir schon, dass die Durchschnitte der Geraden  $A, B, C$  mit der Curve die neun Wendepuncte sind. Nach den vorigen Gleichungen aber stellen sich diese dar, als die Durchschnitte dieser Geraden

$$A = 0 \quad B = 0 \quad C = 0$$

mit folgenden neun anderen

$$\begin{aligned} A' &= A+B+C=0, \quad B' = A+\alpha B+\alpha^2 C=0, \quad C' = A+\alpha^2 B+\alpha C=0 \\ A'' &= \alpha A+B+C=0, \quad B'' = A+\alpha B+C=0, \quad C'' = A+B+\alpha C=0 \\ A''' &= \alpha^2 A+B+C=0, \quad B''' = A+\alpha^2 B+C=0, \quad C''' = A+B+\alpha^2 C=0 \end{aligned}$$

Diese sind demnach die zwölf in Rede stehenden Geraden; wie man sieht, sind vier von ihnen reell, und acht imaginär. Substituirt man in die vorigen Gleichungen die Werthe  $A=0, B=0, C=0$  und vergleicht die Resultate mit (2) und der in (3) angewendeten Bezeichnung, so ergiebt sich, dass die Durchschnitte der Geraden  $A, B, C$  mit  $A', B',$  etc. folgende Wendepuncte liefern:

$$\begin{array}{l|l}
 (AA')=1 \ (AB')=2 \ (AC')=3 & (AA'')=1 \ (AB'')=3 \ (AC'')=2 \\
 (BA')=4 \ (BB')=5 \ (BC')=6 & (BA'')=5 \ (BB'')=4 \ (BC'')=6 \\
 (CA')=7 \ (CB')=8 \ (CC')=9 & (CA'')=9 \ (CB'')=8 \ (CC'')=7 \\
 (AA''')=1 \ (AB''')=2 \ (AC''')=3 & \\
 (BA''')=6 \ (BB''')=4 \ (BC''')=5 & \\
 (CA''')=8 \ (CB''')=9 \ (CC''')=7. &
 \end{array}$$

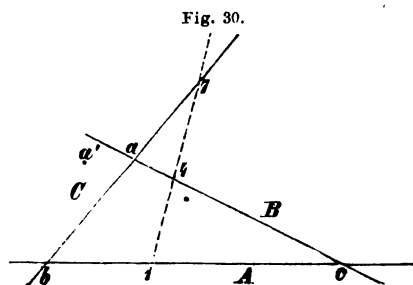
Die zwölf Geraden verbinden also folgende Wendepunkte

$$\begin{array}{llll}
 A = 123 & A' = 147 & A'' = 159 & A''' = 168 \\
 B = 456 & B' = 258 & B'' = 348 & B''' = 249 \\
 C = 789 & C' = 369 & C'' = 267 & C''' = 357
 \end{array}$$

und bilden in dieser Anordnung die vier Gruppen, von denen jede alle Wendepunkte enthält. Jede dieser Gruppen bildet ein Dreieck, nämlich  $ABC$ ,  $A'B'C'$ ,  $A''B''C''$ ,  $A'''B'''C'''$ . Bezeichnet man die den Seiten derselben resp. gegenüberliegenden Ecken mit  $abc$ ,  $a'b'c'$ ,  $a''b''c''$ ,  $a'''b'''c'''$ , so erhält man auch die Coordinaten dieser Punkte (entweder durch Auflösung je zweier der obigen Gleichungen für  $A'$ ,  $B'$ , etc. oder, indem man beachtet, dass die Coordinaten jedesmal so zu wählen sind, dass die identische Gleichung  $1 + \alpha + \alpha^2 = 0$  entsteht, und dass  $abc$  die Ecken des Fundamentaldreieckes sind) folgendermassen:

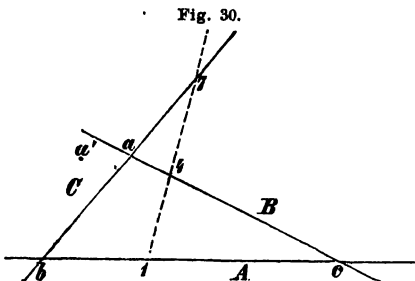
$$\begin{array}{lll}
 BC = a \dots 1, 0, 0 & B'C' = a' \dots 1, 1, 1 & B''C'' = a'' \dots 1, \alpha, \alpha \\
 CA = b \dots 0, 1, 0 & C'A' = b' \dots 1, \alpha^2, \alpha & C''A'' = b'' \dots 1, \alpha^2, 1 \\
 AB = c \dots 0, 0, 1 & A'B' = c' \dots 1, \alpha, \alpha^2 & A''B'' = c'' \dots 1, 1, \alpha^2 \\
 & B'''C''' = a''' \dots 1, \alpha^2, \alpha^2 & \\
 & C'''A''' = b''' \dots 1, \alpha, 1 & \\
 & A'''B''' = c''' \dots 1, 1, \alpha. &
 \end{array}$$

Hieraus ersieht man ferner, dass eines der vier Dreiecke vollständig reell ist, nämlich  $ABC$ ; aber von den Geraden  $A$ ,  $B$ ,  $C$  enthält jedes nur einen reellen Wendepunkt, nämlich der Reihe nach 1, 4, 7 (Fig. 30), und dann noch





zwei conjugirt imaginäre. Von einem zweiten Dreiecke, nämlich  $A' B' C'$  ist eine Seite  $A'$  reell, nämlich die Verbindungslinie der reellen Wendepunkte 1, 4, 7, und ausserdem die gegenüberliegende Ecke  $a'$ , die beiden anderen Seiten und Ecken dieses Dreiecks sind imaginär. Die beiden noch übrigen Dreiecke endlich sind vollständig imaginär. (Hesse. Eigenschaften der Wendepunkte etc. Crelle's Journ. Bd. 38. pag. 257.)



355. Durch die neun Wendepunkte einer Curve 3. O.  $u = 0$  gehen [339] unendlich viele Curven 3. O. hindurch, unter denen sich auch die Hesse'sche Curve  $H(u) = 0$  befindet. Alle diese Curven aber haben die Wendepunkte der Curve  $u$  zu ihren eigenen Wendepunkten. (Hesse. Ueber die Wendepunkte der Curven 3. O. Crelle's Journ. Bd. 28. pag. 107). Ein derartiger Büschel von Curven 3. O. heisst ein syzygetischer Büschel. (Cayley. On curves of the third order. Phil. Trans. vol. 147. pag. 416. Cremona art. 140. a)

Beweis 1. Durch einen Wendepunkt  $w$  gehen vier Gerade, von denen jede zwei neue Wendepunkte enthält [353], und die man daher als Secanten der Curve  $u$  betrachten kann. Die harmonische Polare von  $w$  schneidet diese Secanten in den zu  $w$  zugeordneten harmonischen Punkten. Legt man nun durch  $w$  und die acht übrigen Wendepunkte eine andere Curve 3. O., so sind obige 4 Geraden auch für diese Curve Secanten der Art, dass die auf jeder zu  $w$  zugeordneten harmonischen Punkte in einer Geraden liegen, also [342] ist  $w$  auch ein Wendepunkt der neuen Curve 3. O. (Salmon. Lettre à monsieur Crelle. Crelle's Journ. Bd. 39. pag. 365. Cremona art. 140. a).

Beweis 2. Bringt man nach [354] die Gleichung der Curve  $u$  auf die Form

$$A^3 + B^3 + C^3 - 3kABC = 0,$$

so sind  $ABC$  drei Gerade, welche die Curve in ihren neun Wendepunkten durchschneiden, und zwar gilt dies, welchen Werth auch die Constante  $k$  haben möge. Giebt man aber

dieser Constanten alle möglichen Werthe, so erhält man alle möglichen Curven 3. O., welche durch die Durchschnitte einer derselben mit den drei Geraden  $A, B, C$  hindurchgehen (z. B. durch die Schnitte der beiden Curven  $A^3 + B^3 + C^3 = 0$ , und  $A B C = 0$ ) also sind diese Punkte die Wendepuncte für alle Curven dieses Büschels, der demnach ein syzygetischer ist.

**356.** Alle Curven eines syzygetischen Büschels haben die harmonische Polare jedes Wendepuncts gemeinschaftlich. — Aus [355]. Bew. 1.

**357.** Ist  $u = 0$  eine Curve 3. O.,  $H(u) = 0$  ihre Hesse'sche Curve, so ist identisch

$$H(H(u) + \lambda u) \equiv \alpha u + \beta H(u),$$

wo  $\lambda, \alpha, \beta$  Constanten bedeuten. (*Hesse. Zur Theorie der Elimination. Crelle's Journ. Bd. 28. pag. 88.*)

Beweis.  $H(u) + \lambda u = 0$  stellt eine Curve dar, welche durch die Schnittpuncte der Curven  $u$  und  $H(u)$ , d. h. durch die Wendepuncte von  $u$  (und [355] auch von  $H(u)$ ) geht. Die Wendepuncte dieser neuen Curve liegen auf ihrer Hesse'schen Curve d. h. auf  $H(H(u) + \lambda u) = 0$ , sie sind aber [355] identisch mit den Wendepuncten der Curve  $u$ , daher geht die Curve  $H(H(u) + \lambda u) = 0$  auch durch die Schnitte von  $u = 0$  und  $H(u) = 0$ , und folglich muss ihre Gleichung auch die Form  $\alpha u + \beta H(u) = 0$  haben. (*Hart. Salmon. Lettre à l'éditeur. Crelle's Journ. Bd. 39. pag. 366. Serret. Alg. sup. II. pag. 589.*)

**358.** Legt man durch einen Wendepunct  $w$  drei Secanten, welche die Curve 3. O. in  $ab, a'b', a''b''$  schneiden; so haben alle Curven 3. O., welche durch die sieben Punkte  $w, ab, a'b', a''b''$  hindurchgehen, den Wendepunct als solchen und die harmonische Polare desselben gemeinschaftlich.

Beweis. Sind  $h, h', h''$  die Punkte, welche mit  $w$  die Punctepaare  $ab, a'b', a''b''$  harmonisch trennen, so liegen  $h, h', h''$  auf der harmonischen Polare von  $w$  [341]. Legt man nun durch die obigen sieben Punkte irgend eine andere Curve 3. O., so sind die Geraden  $wab, wa'b', wa''b''$  auch für diese Secanten, daher bleiben die Punkte  $h, h', h''$  ungeändert, und da diese in einer Geraden liegen, so ist  $w$  auch für die neue Curve ein Wendepunct [342], und  $hh'h''$  dessen harmonische Polare in Bezug auf die neue Curve. (*Salmon. H. pl. Curves.*)

pag. 141 und Crelle's Journ. Bd. 39. pag. 365. *Cremona. Cve plane* art. 140.)

**359.** Legt man durch irgend sieben Wendepuncte einer Curve 3. O. irgend eine neue Curve 3. O., so ist einer der sieben Wendepuncte und zwar derjenige, welcher mit den beiden fehlenden Wendepuncten in gerader Linie liegt, auch für die neue Curve ein Wendepunct und hat in Beziehung auf beide Curven die harmonische Polare gemeinschaftlich.

**Beweis.** Da durch jeden Wendepunct vier Gerade gehen, welche alle übrigen Wendepuncte enthalten [353], so lassen sich irgend sieben Wendepuncte stets so anordnen, dass durch drei Paare von ihnen drei Gerade gehen, die in dem siebenten zusammenlaufen, und dieser liegt dann auch mit den beiden fehlenden Wendepuncten in gerader Linie. Jene drei Geraden bilden dann drei durch einen Wendepunct gehende Secanten, und daher gilt [358]. (*Salmon*, l. c. [355] pag. 366 und *H.* pl. Cvs. pag. 142.)

### §. 3.

**360.** Die Tangenten (Wendetangenten) in zwei Wendepuncten schneiden sich auf der harmonischen Polare desjenigen Wendepunctes, der mit den beiden ersten in gerader Linie liegt. — Aus [344], wenn die Secante  $wab$  durch zwei neue Wendepuncte geht, oder aus [347], wenn sowohl  $aa'a''$ , als auch  $bb'b''$  in einen Wendepunct zusammenfallen. (*Cremona.* art. 139. b.)

**361.** Die harmonischen Polaren dreier in gerader Linie liegender Wendepuncte  $w_1 w_2 w_3$  schneiden sich in einem und demselben Puncte  $r$ . (*Plücker.* Syst. d. anal. Geom. pag. 288.)

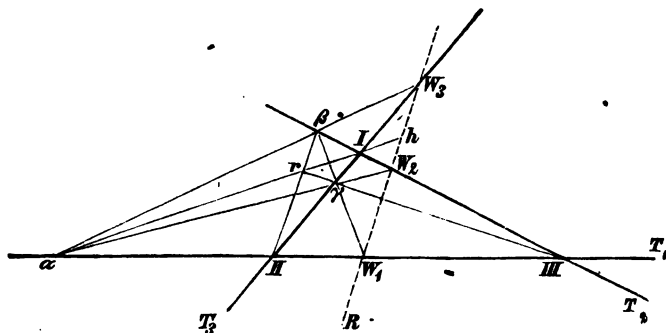
**Beweis.** Seien  $T_1 T_2 T_3$  (Fig. 31) die den Wendepuncten  $w_1 w_2 w_3$  angehörigen Wendetangenten, und  $I II III$  ihre Durchschnittspuncte, so folgt zunächst aus [360], dass die harmonischen Polaren von  $w_1 w_2 w_3$  resp. durch  $I, II, III$  hindurchgehen. Seien  $I\alpha, II\beta, III\gamma$  diese harmonischen Polaren. Alsdann sind nach [280] die conischen Polaren der drei Wendepuncte die drei Geradenpaare  $(II III, I\alpha)$   $(III I, II\beta)$   $(I II, III\gamma)$ . Diese schneiden sich nach [284] in vier Puncten, nämlich [285] in den vier Polen der Geraden  $w_1 w_2 w_3$  in Bezug auf die Curve 3. O. Bezeichnet man nun

mit  $r$  den Durchschnitt der harmonischen Polaren  $I\alpha$  und  $II\beta$ , so schneiden die beiden Geradenpaare  $II\ III, I\alpha; III\ I, II\beta$  sich in folgenden vier Punkten

$(II\ III, III\ I) = III, (II\ III, II\beta) = II, (I\alpha, III\ I) = I, (I\alpha, II\beta) = r$ , also muss auch das dritte Geradenpaar  $I\ II, III\gamma$  durch diese vier Punkte gehen; aber  $I\ II$  geht durch  $I$  und  $II$ , mithin geht  $III\gamma$  durch  $r$ . (Cremona. art. 139. d)

**362.** Hieraus folgt ausserdem: Die vier Pole einer Geraden, welche drei Wendepuncte  $w_1, w_2, w_3$  verbindet, sind die drei Durchschnitte der zugehörigen Wendetangenten und der Punkt  $r$ , in dem sich die harmonischen Polaren von  $w_1, w_2, w_3$  schneiden. (Plücker. Syst. d. anal. Geom. pag. 288. Cremona art. 139. d.)

Fig. 31.



**363.** Auf der Wendetangente  $T_1$  eines Wendepuncts  $w_1$  sind die Durchschnitte  $III$  und  $II$  der Wendetangenten  $T_2$  und  $T_3$  zweier mit  $w_1$  auf einer Geraden liegenden Wendepuncte  $w_2$  und  $w_3$  einander harmonisch zugeordnet in Bezug auf den Wendepunct  $w_1$  und den Durchschnitt  $\alpha$  der harmonischen Polare  $I\alpha$  von  $w_1$  (Fig. 31.)

**Beweis.** Betrachtet man die Gerade  $w_1 w_2 w_3$  als eine durch  $w_1$  gezogene Transversale, welche die Curve in  $w_2$  und  $w_3$  trifft, so ist der Durchschnitt  $h$  der Geraden  $w_1 w_2 w_3$  mit der harmonischen Polaren  $I\alpha$  von  $w_1$  nach [341] harmonisch zugeordnet zu  $w_1$  in Bezug auf  $w_2, w_3$ . Mithin sind  $I(h w_1 w_2 w_3)$  oder, was dasselbe ist,  $I(\alpha w_1 III II)$  vier harmonische Strahlen, und daher  $\alpha w_1 II III$  vier harmonische Punkte. (Cremona. art. 139. c)



**366.** Da die neun Wendepuncte auf zwölf verschiedene Arten zu je drei, die auf einer Geraden liegen, combinirt werden können, so schneiden sich ihre neun harmonischen Polaren zu je drei in zwölf Puncten [361], und diese sind die zwölf Ecken der vier Dreiecke, welche von jenen Geraden gebildet werden [365]. Da durch jeden Wendepunct vier dieser Geraden gehen [353], so liegen auf jeder harmonischen Polare vier jener Eckpuncte. Von den neun harmonischen Polaren sind (den Wendepuncten entsprechend) drei reell und sechs imaginär; und von jenen zwölf Puncten sind (den Geraden entsprechend) vier reell und acht imaginär [354]. (*Hesse. Eigenschaften der Wendepuncte etc. Crelle's Journ. Bd. 38. pag. 259. Cremona art. 142.*)

**367.** Für jeden Punct  $m$ , der auf einer Geraden  $R$  liegt, welche drei Wendepuncte verbindet, ist die conische Polare in Bezug auf die Curve dieselbe, wie in Bezug auf die zugehörigen drei Wendetangenten.

**Beweis.** Dieser Satz ist nur ein specieller Fall von [301]. Denn da auf einer Wendetangente im Wendepuncte drei Curvenpuncte vereinigt sind, so bilden die drei Wendetangenten eine Curve 3. O., deren neun Durchschnitte mit der gegebenen Curve auf drei mit  $R$  zusammenfallenden und daher auch durch  $m$  gehenden Geraden liegen.

**368. Aufgabe.** Wenn von einer Curve 3. O. drei in einer Geraden  $R$  liegende Wendepuncte nebst den Wendetangenten in den letzteren, und ausserdem ein Curvenpunct  $p$  gegeben sind, so soll man in diesem die Tangente construiren.

**Auflösung.** Man construire nach [291] die gerade Polare des Punctes  $p$  in Bezug auf das von den Wendetangenten gebildete Dreieck. Schneidet diese Polare die Gerade  $R$  in  $m$ , so ist  $pm$  die verlangte Tangente. (*Plücker. System der anal. Geom. pag. 289.*)

**Beweis.** Da die gerade Polare von  $p$  in Bezug auf die drei Wendetangenten durch  $m$  geht, so geht die conische Polare von  $m$  in Bezug auf dasselbe Dreieck durch  $p$  [273]. Aber diese conische Polare ist nach [367] zugleich die conische Polare von  $m$  in Bezug auf die Curve, also berührt  $mp$  die Curve in  $p$ . [270].

369. Die Berührungspunkte der sechs Tangenten aus einem Punkte  $m$  der harmonischen Polare  $W$  eines Wendepunctes  $w$  liegen paarweise auf drei Geraden, die durch den Wendepunct  $w$  gehen.

Beweis. Sei  $ma$  eine der Tangenten mit dem Berührungspunkte  $a$ . Schneidet man die Curve mit  $wa$  in  $b$ , so geht die Tangente in  $b$  durch  $m$  [344], daher ist  $mb$  eine zweite Tangente. Ist nun  $ma'$  eine dritte Tangente, so kann  $a'$  mit  $wab$  nicht in einer Geraden liegen, daher giebt es jetzt noch eine Tangente  $mb'$ , bei der  $b'$  mit  $a'w$  in gerader Linie liegt, und ebenso giebt es noch ein drittes Paar.

370. Die sechs Tangenten aus einem Punkte  $m$  der harmonischen Polare  $W$  eines Wendepunctes  $w$  bilden eine Involution, und zwar sind je zwei Tangenten, deren Berührungspunkte mit  $w$  in einer Geraden liegen, conjugirte Strahlen. Die Doppelstrahlen der Involution werden von der harmonischen Polare  $W$  und der Geraden  $mw$  gebildet.

Beweis. Sind  $a, b$  die Berührungspunkte solcher zwei Tangenten, dass  $wab$  in einer Geraden liegen, und schneidet diese Gerade die harmonische Polare  $W$  in  $h$ , so sind  $whab$  vier harmonische Punkte [341], und daher  $m(whab)$  vier harmonische Strahlen. Setzt man an Stelle des Tangentenpaares  $m(ab)$  ein anderes in derselben Art zusammengehöriges Paar, so gilt dasselbe, und dabei bleiben die Strahlen  $mw$  und  $mh$ , d. i.  $W$  ungeändert. Da die sechs Tangenten also drei Strahlenpaare bilden, welche einander in Bezug auf dasselbe Strahlenpaar  $mw$  und  $W$  harmonisch zugeordnet sind, so bilden sie eine Involution [67] [45]. (*Cremona*. Zus. in *Curtze's* Uebersetzung. art. 139. a. bis.)

371. Nimmt man auf den harmonischen Polaren  $W_1, W_2, W_3$  dreier in gerader Linie liegender Wendepuncte  $w_1, w_2, w_3$  je einen Punkt  $m_1, m_2, m_3$  beliebig an und zieht aus jedem ein solches Tangentenpaar an die Curve, dass die Berührungspunkte mit dem betreffenden Wendepuncte in gerader Linie liegen [369], so befinden sich diese sechs Berührungspunkte auf einem Kegelschnitt. — Aus [225], denn die sechs Berührungspunkte liegen paarweise auf drei Geraden, welche durch die drei in gerader Linie liegenden Curvenpuncte  $w_1, w_2, w_3$  gehen.

**372.** Liegt ein Wendepunct  $w$  im Unendlichen, so ist seine harmonische Polare ein Durchmesser der Curve, d. h. sie halbt alle Sehnen, welche parallel sind zu der Geraden, die  $w$  mit zwei anderen Wendepuncten verbindet.

**Beweis.** Schneidet eine durch  $w$  gezogene Gerade die Curve in  $a, b$  und die harmonische Polare in  $h$ , so sind [341]  $w h a b$  vier harmonische Punkte. Rückt aber  $w$  ins Unendliche, so fällt  $h$  in die Mitte von  $a b$ ; und sämmtliche Sehnen  $a b$  werden parallel mit der Geraden, die  $w$  mit zwei andern Wendepuncten verbindet. (*Salmon. pag. 141.*)

**373.** Liegt die harmonische Polare eines Wendepunctes  $w$  im Unendlichen, so ist der letztere ein Mittelpunkt der Curve, d. h. alle durch ihn gehenden Sehnen werden in ihm halbt. — Denn wie im vorigen Art. sind  $w h a b$  vier harmonische Punkte. Hier rückt  $h$  ins Unendliche, also fällt  $w$  in die Mitte von  $a b$ . (*Salmon. pag. 141.*)

## Siebenter Abschnitt.

### Tangenten aus Curvenpunkten. Correspondirende Punkte und Punctepaare. Punctquadrupel.

#### §. 1.

**374.** Liegen drei Berührungspunkte  $a, b, c$  der aus einem Punkte  $m$  der Curve an diese gehenden Tangenten in einer Geraden, so ist  $m$  ein Wendepunct, und die Gerade  $a b c$  die harmonische Polare desselben. [341] — Denn die zu  $a, b, c$  gehörigen Tangentialpunkte liegen [230] ebenfalls in einer Geraden, da sie aber hier in einen Curvenpunct zusammenfallen, so ist dieser ein Wendepunct.

**375.** Hieraus folgt: Sind  $a, b, c, d$  die Berührungspunkte der vier Tangenten, welche aus einem Curvenpuncte  $m$ , der nicht ein Wendepunct ist, an die Curve gelegt werden können, so liegen von ihnen keine drei in einer Geraden.

**376.** Zieht man aus einem Punkte  $m$  einer Curve 3. O. die vier ausser der Tangente in  $m$  möglichen Tangenten an



die Curve, so bleibt das Doppelverhältniss derselben constant, wenn  $m$  auf der Curve fortrückt.

Beweis 1. Sind  $a, b, c, d$  die vier Berührungspuncte, so geht die conische Polare von  $m$  durch diese Puncte hindurch [270] und berührt die Curve in  $m$  [269]. Bezeichnet man also mit  $m'$  einen unendlich nahe bei  $m$  liegenden Curvenpunct, so liegt dieser auch auf der conischen Polare von  $m$ . Zieht man nun aber aus  $m'$  aufs Neue die vier Tangenten an die Curve, so sind die Durchschnittspuncte derselben mit den frühern vier Tangenten die Puncte  $a, b, c, d$ , weil [187] zwei unendlich nahe Tangenten sich auf der Curve schneiden. Demnach liegen diese Durchschnitte mit  $mm'$  auf dem nämlichen Kegelschnitt, und daher [86] ist das Doppelverhältniss der Strahlen  $m(abcd)$  dasselbe wie das der Strahlen  $m'(abcd)$ . Dieses bleibt also ungeändert, wenn  $m$  auf der Curve fortrückt. (*Salmon. Théorèmes sur les courbes du 3. degré. Crelle's Journ. Bd. 42. pag. 274. H. pl. Cvs. pag. 171. Cremona, art. 131.*)

Beweis 2. S. [395].

377. Zieht man aus zwei Puncten  $m$  und  $m'$  einer Curve 3. O. die Tangenten  $m(a b c d)$  und  $m'(a' b' c' d')$  an die Curve, so liegen die sechszehn Schnittpuncte dieser zwei Mal vier Geraden auf vier Kegelschnitten, welche alle durch  $m$  und  $m'$  hindurchgehen. (*Salmon. Théorèmes etc. Crelle's Journ. Bd. 42. pag. 275.*)

Beweis. Sind  $m'a', m'b', m'c', m'd'$  die Lagen, welche  $ma, mb, mc, md$  resp. annehmen, wenn  $m$  nach  $m'$  gerückt ist, so haben diese beiden Strahlenbüschel gleiches Doppelverhältniss [376]. Sind  $\kappa, \lambda, \mu, \nu$  die der Reihe nach genommenen Durchschnitte je zweier Strahlen  $ma, m'a'$ , etc., so liegen  $m m' \kappa \lambda \mu \nu$  auf einem Kegelschnitt [85]. Combinirt man die Strahlenpaare in anderer Weise, so liegen die Schnittpuncte der vier Paare nur dann auf einem Kegelschnitt, wenn das Doppelverhältniss des zweiten Büschels dem des ersten gleich ist, weil die sich schneidenden Strahlen nur dann als einander projectivisch entsprechend betrachtet werden können. Um also Kegelschnitte zu erhalten, darf man nur solche Combinationen nehmen, welche Strahlenbüschel mit gleichem Doppelverhältniss geben. Nun sind nach [24] nur folgende Doppelverhältnisse dem ersten unter ihnen gleich

$$(a' b' c' d'), (b' a' d' c'), (c' d' a' b'), (d' c' b' a').$$

Combinirt man jeden von diesen Büscheln mit  $a b c d$  und bezeichnet die Durchschnittspuncte wie nebenstehend

$$\begin{array}{l} a, b, c, d, \\ a', b', c', d', \dots \kappa, \lambda, \mu, \nu \\ b', a', d', c', \dots \kappa', \lambda', \mu', \nu' \\ c', d', a', b', \dots \kappa'', \lambda'', \mu'', \nu'' \\ d', c', b', a', \dots \kappa''', \lambda''', \mu''', \nu''', \end{array}$$

so erhält man die Durchschnitte jeder Tangente des einen Büschels mit jeder des anderen Büschels, also alle sechszehn Schnittpuncte. Diese liegen also auf vier Kegelschnitten, welche alle durch  $m$  und  $m'$  hindurch gehen, nämlich

$$m m' \kappa \lambda \mu \nu, \quad m m' \kappa' \lambda' \mu' \nu', \quad m m' \kappa'' \lambda'' \mu'' \nu'', \quad m m' \kappa''' \lambda''' \mu''' \nu'''$$

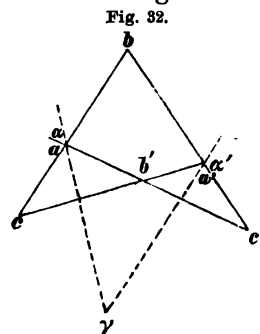
(*Salmon. pag. 151. Cremona. art. 131. a. 149. e.*)

## §. 2.

**378.** Zwei Punkte einer Curve 3. O., welche einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct haben, sollen correspondirende Punkte der Curve genannt werden. (*Cremona. art. 133 a.*) Da aus einem Punkte der Curve vier Tangenten an die letztere gehen, so hat ein Curvenpunct als Berührungspunct betrachtet, drei mit ihm correspondirende Punkte. Solche vier unter einander correspondirende Punkte, welche einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct haben, sollen das dem letzteren zugehörige Punctquadrupel genannt werden. (*Em. Weyr. Zur Erzeugung der Curven 3. O. Monatsber. der Wiener Acad. Bd. 58. Oct. 1868.*)

**379.** Liegen die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits auf einer Curve 3. O., so sind die gegenüberliegenden Ecken correspondirende Punkte und die den drei Eckenpaaren zugehörigen Tangentialpuncte liegen in gerader Linie.

Beweis 1. Seien (Fig. 32.)  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  die gegenüberliegenden Eckenpaare des Vierseits. Betrachtet man die in einem derselben z. B.  $a$  und  $a'$ , gezogenen Tangenten als gerade Linien



welche je zwei unendlich nahe Punkte  $a\alpha$  und  $a'\alpha'$  verbinden, so kann man das Viereck  $aa'bb'$  als ein Sechseck  $aa\alpha b'a'\alpha'$  betrachten, in welchem die sechs Ecken und die Durchschnitte

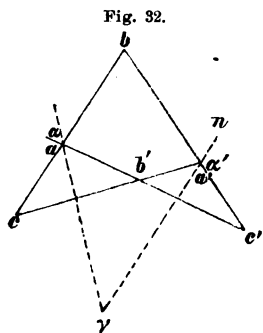


Fig. 32.

zweier Paare gegenüberliegenden Seiten  $(\alpha b, \alpha' b') = c$  und  $(b a', b' a) = c'$  auf der Curve liegen. Nach [233] liegt dann auch der Durchschnitt des dritten Paares gegenüberliegender Seiten  $(a\alpha, a'\alpha') = \gamma$  auf der Curve. Dieses wird hier aber von den beiden Tangenten in  $a$  und  $a'$  gebildet. Ebenso kann der Beweis für die beiden anderen Eckenpaare geführt werden. Nun liegen von den sechs Ecken eines voll-

ständigen Vierecks allemal drei, von denen keine zwei demselben Paare angehören, in gerader Linie [82] z. B.  $a, b, c$ , demnach liegen deren zugehörige Tangentialpunkte ebenfalls in einer Geraden [230]. (*Maclaurin* l. c. [230] pag. 237. 242. *Cremone*, art. 45. d.)

Beweis 2. Bedeuten  $A = 0, B = 0, C = 0, D = 0$  die Seiten des Vierseits, indem  $A, B, C, D$  lineare homogene Functionen von  $x_1, x_2, x_3$  bezeichnen, so kann die Gleichung einer Curve 3. O.  $u$ , welche durch die sechs Ecken des Vierseits geht, in der Form

$$u = \alpha BCD + \beta ACD + \gamma ABD + \delta ABC = 0$$

geschrieben werden, worin  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  Constanten bedeuten. Denn man kann bei dieser Gleichung über 11 Constanten verfügen, und sie wird erfüllt, sobald zwei der vier linearen Functionen verschwinden. Sind nun  $y_1, y_2, y_3$  die veränderlichen Coordinaten der Tangente in einem Punkte  $x$ , und setzt man  $\frac{\partial A}{\partial x_i} = A_i$ , etc., so erhält man nach [149] als Gleichung der Tangente

$$\left. \begin{aligned} &(\beta CD + \gamma BD + \delta BC)(A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3) \\ &+ (\alpha CD + \gamma AD + \delta AC)(B_1 y_1 + B_2 y_2 + B_3 y_3) \\ &+ (\alpha BD + \beta AD + \delta AB)(C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3) \\ &+ (\alpha BC + \beta AC + \gamma AB)(D_1 y_1 + D_2 y_2 + D_3 y_3) \end{aligned} \right\} = 0.$$

Bezeichnet man aber mit  $A_y, B_y$  etc., was aus  $A, B$ , etc.

wird, wenn man darin die  $y_i$  statt der  $x_i$  substituirt, so ist nach dem Euler'schen Satze [6], da  $A_1 B_1$ , etc. Constanten sind

$$\begin{aligned} A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 &= A_y & B_1 y_1 + B_2 y_2 + B_3 y_3 &= B_y \\ C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 &= C_y & D_1 y_1 + D_2 y_2 + D_3 y_3 &= D_y. \end{aligned}$$

Demnach wird die Gleichung der Tangente

$$\begin{aligned} &(\beta CD + \gamma BD + \delta BC) A_y + (\alpha CD + \gamma AD + \delta AC) B_y \\ &+ (\alpha BD + \beta AD + \delta AB) C_y + (\alpha BC + \beta AC + \gamma AB) D_y \} = 0. \end{aligned}$$

Hieraus erhält man nun für die Tangente in der Ecke  $A=0$ ,  $B=0$  die Gleichung

$$(1) \quad \beta A_y + \alpha B_y = 0$$

und für die in der gegenüberliegenden Ecke  $C=0$ ,  $D=0$

$$(2) \quad \delta C_y + \gamma D_y = 0.$$

Multiplirt man die erstere mit  $C_y D_y$ , die letztere mit  $A_y B_y$  und addirt, so erhält man für ihren Durchschnitt

$$\alpha B_y C_y D_y + \beta A_y C_y D_y + \gamma A_y B_y D_y + \delta A_y B_y C_y = 0,$$

und daher liegt dieser auf der Curve  $u$ . Ebenso beweist man dasselbe von den Durchschnitten der beiden anderen Tangentenpaare. Multiplirt man ferner die Gleichung (1) mit  $\frac{1}{\alpha \beta}$ ,

und (2) mit  $\frac{1}{\gamma \delta}$ , so giebt die Summe

$$\frac{A_y}{\alpha} + \frac{B_y}{\beta} + \frac{C_y}{\gamma} + \frac{D_y}{\delta} = 0;$$

daher liegt der Durchschnitt der beiden Tangenten auf dieser Geraden. Da aber die Gleichung der letzteren sowohl in Bezug auf  $A_y, B_y, C_y, D_y$  als auch in Beziehung auf  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  symmetrisch ist, so erhält man dieselbe Gerade auch für die Durchschnitte der beiden anderen Tangentenpaare. (Cayley. Mémoire sur les courbes du troisième ordre. Liouville Journ. Tome 9. pag. 285.)

**380.** Zieht man aus einem beliebigen Curvenpuncte  $b$  Strahlen nach zwei correspondirenden Puncten  $aa'$  und schneidet damit die Curve in  $cc'$ , so sind dies zwei neue correspondirende Puncte, und der Durchschnitt  $(ac', a'c) = b'$  ist ein zu  $b$  correspondirender Punct. (Fig. 32.) (Maclaurin l. c. [230] pag. 239.)

**Beweis.** Denkt man sich die Tangenten in  $a$  und  $a'$  als

die Verbindungslinien je zweier unendlich naher Punkte  $a\alpha$  und  $a'\alpha'$  und nennt  $\gamma$  ihren Durchschnittspunkt, welcher der Annahme nach auf der Curve liegt, so hat man ein Sechseck  $a\alpha c a' \alpha' c'$ , von welchem nicht bloss die sechs Ecken, sondern auch die Durchschnitte zweier Paare gegenüberliegender Seiten

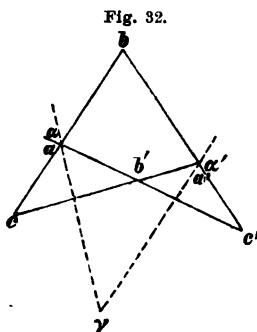


Fig. 32.

$(a\alpha, a'\alpha') = \gamma$ ,  $(\alpha c, \alpha'c') = b$  auf der Curve liegen. Folglich [233] liegt auch der Durchschnitt des dritten Seitenpaares  $(c\alpha', c'a) = b'$  auf der Curve. Dann aber bilden  $a\alpha b b' c c'$  die auf der Curve liegenden Ecken eines

vollständigen Vierseits, daher [379] sind  $b b'$  und  $c c'$  correspondirende Punkte.

381. Sei  $w$  ein Wendepunct,  $t$  der Berührungspunct einer aus  $w$  gezogenen Tangente und  $b$  irgend ein dritter Punct der Curve. Schneidet man die Curve mit  $b w$  in  $c$  und mit  $b t$  in  $c'$ , so liegt der Schnittpunct  $b' = (c t, c' w)$  auf der Curve, und sowohl  $b b'$ , als auch  $c c'$  sind correspondirende Punkte. — Aus [380], da  $w$  als ein mit  $t$  correspondirender Punct betrachtet werden kann.

382. Zieht man von einem beliebigen Curvenpuncte Strahlen nach den Puncten  $a_1 a_2 a_3 a_4$  eines Quadrupels [378], so bilden die Puncte  $b_1 b_2 b_3 b_4$ , in denen diese Strahlen die Curve treffen, ein neues Quadrupel. (Mittheilung von Herrn Prof. Küpper.) — Denn da ein Punct  $a$  zu jedem der drei anderen Puncte  $a$  correspondirend ist, so ist auch der zugehörige Punct  $b$  zu jedem der drei andern Puncte  $b$  correspondirend [380]; mithin haben auch die letzteren vier Puncte einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct.

### §. 3.

383. Liegen drei Curvenpuncte  $\alpha\beta\gamma$  in gerader Linie, und zieht man aus  $\alpha$  und  $\beta$  je eine Tangente an die Curve, so geht die Verbindungslinie ihrer Berührungspuncte  $a, b$  allemal durch den Berührungspunct  $c$  einer von  $\gamma$  ausgehenden Tangente.

Beweis. Ist  $c$  zunächst der Schnittpunkt der Geraden  $a b$  mit der Curve, so müssen die Tangentialpuncte von  $a b c$  in gerader Linie liegen [230]; aber die Tangentialpuncte von  $a, b$  sind  $\alpha, \beta$ , daher muss  $\gamma$  der Tangentialpunct von  $c$  sein, d. h.  $c$  muss in den Berührungspunct einer von  $\gamma$  ausgehenden Tangente fallen. (*Maclaurin* l. c. [230] pag. 225. *Salmon* pag. 134.)

Bemerkung. In [226] war bewiesen, dass wenn man aus drei in gerader Linie liegenden Curvenpuncten  $\alpha \beta \gamma$  Tangenten an die Curve zieht, die drei Berührungspuncte die Eigenschaft haben, dass die Curve in ihnen von einem Kegelschnitte berührt wird, und dabei bemerkt, dass der Letztere in zwei zusammenfallende Gerade degeneriren kann. Man hat jetzt vollständiger: Sind  $a$  und  $b$  die Berührungspuncte je einer aus  $\alpha$  und  $\beta$  an die Curve gehenden Tangente, und  $c_1 c_2 c_3 c_4$  die Berührungspuncte der vier von  $\gamma$  ausgehenden Tangenten, so liegt einer der Puncte  $c$  mit  $a b$  in gerader Linie, und die drei anderen bilden mit  $a, b$  die Berührungspuncte je eines Kegelschnitts. Vgl. [542].

384. Zieht man aus drei in gerader Linie liegenden Curvenpuncten  $\alpha, \beta, \gamma$  drei solche Tangenten an die Curve, dass die Berührungspuncte nicht in gerader Linie liegen, so schneiden sich die Geraden, welche die Ecken dieses Tangentendreiecks mit den gegenüberliegenden Berührungspuncten verbinden, in einem Puncte.

Beweis. Liegen die Berührungspuncte nicht in gerader Linie, so sind sie nach [383, Bem.] zugleich die Berührungspuncte eines Kegelschnitts, welcher also auch die Seiten des Tangentendreiecks in jenen Berührungspuncten berührt. Mit hin folgt die Behauptung aus [104]. (*Cremona* art. 149 a.)

Zusatz. Lässt man die Puncte  $\alpha, \beta, \gamma$  ins Unendliche rücken, so folgt: Wenn man ein Dreieck beschreibt, dessen Seiten den Asymptoten einer Curve 3. O. parallel sind und die Curve berühren, so schneiden sich die drei Geraden, welche die Berührungspuncte mit den gegenüberliegenden Ecken des Dreiecks verbinden, in einem und demselben Puncte. (*Plücker*. Syst. d. anal. Geom. pag. 46.)

385. Sind  $\alpha \beta \gamma$  drei in gerader Linie liegende Curvenpuncte, und zieht man aus jedem die vier Tangenten an die

Curve mit den Berührungspuncten  $a_1 a_2 a_3 a_4$ ;  $b_1 b_2 b_3 b_4$ ;  $c_1 c_2 c_3 c_4$ , so liegen diese 12 Punkte zu je dreien auf 16 Geraden, von denen durch jeden Punkt vier gehen. Die 12 Berührungspuncte lassen sich in folgender Art auf die 16 Geraden vertheilen:

$$\begin{array}{cccc}
 a_1 b_1 c_1 & a_2 b_1 c_2 & a_3 b_1 c_3 & a_4 b_1 c_4 \\
 1) \begin{array}{l} a_1 b_2 c_2 \\ a_1 b_3 c_3 \\ a_1 b_4 c_4 \end{array} & 2) \begin{array}{l} a_2 b_2 c_1 \\ a_2 b_3 c_4 \\ a_2 b_4 c_3 \end{array} & 3) \begin{array}{l} a_3 b_2 c_4 \\ a_3 b_3 c_1 \\ a_3 b_4 c_2 \end{array} & 4) \begin{array}{l} a_4 b_2 c_3 \\ a_4 b_3 c_2 \\ a_4 b_4 c_1 \end{array}
 \end{array}$$

(Hesse. Ueber Curven 3. O. etc. Crelle's Journ. Bd. 36. pag. 153. Für die Berührungspuncte der mit den Asymptoten parallelen Tangenten findet sich der Satz in Plücker's System. der anal. Geom. pag. 272.)

Beweis. Durch jeden der 12 Berührungspuncte gehen vier Gerade, welche noch zwei andere dieser Punkte enthalten [383]. Man erhält dadurch 48 Gerade; jede derselben enthält aber drei Punkte, wird also drei Mal gezählt, daher sind nur 16 dieser Geraden von einander verschieden. Man kann nun die Gruppe 1) willkürlich annehmen, indem man die auf den Geraden  $a_1 b_1$ ,  $a_1 b_2$ ,  $a_1 b_3$ ,  $a_1 b_4$  liegenden und zu  $\gamma$  gehörenden Berührungspuncte der Reihe nach mit  $c_1, c_2, c_3, c_4$  bezeichnet. Alsdann können die Punkte  $a_2 a_3 a_4$  noch beliebig vertheilt werden. Nun sind aber  $b_1 b_2$  zwei correspondirende Punkte, und die durch dieselben und den Punkt  $a_1$  gehenden Geraden schneiden die Curve in  $c_1 c_2$ , folglich [380] schneiden sich  $b_1 c_2$ ,  $b_2 c_1$  in einem mit  $a_1$  correspondirenden Punkte. Dieser werde mit  $a_2$  bezeichnet. Combinirt man ebenso  $a_1 b_1 c_1$  mit  $a_1 b_3 c_3$ , so ist der Schnitt von  $b_1 c_3$ ,  $b_3 c_1$  ein mit  $a_1$  correspondirender Punkt, welcher von  $a_1$  und  $a_2$  verschieden sein muss, weil sonst vier Punkte auf einer Geraden liegen würden, und der daher mit  $a_3$  bezeichnet werden kann. Endlich werde der aus der Combination von  $a_1 b_1 c_1$  mit  $a_1 b_4 c_4$  hervorgehende Schnitt von  $b_1 c_4$ ,  $b_4 c_1$  mit  $a_4$  bezeichnet. Alsdann hat jeder Berührungspunkt seine Bezeichnung gefunden, und es sind dadurch zugleich aus jeder der Gruppen 2) 3) 4) schon zwei Gerade bestimmt, nämlich

$$\begin{array}{ccc}
 a_2 b_1 c_2 & a_3 b_1 c_3 & a_4 b_1 c_4 \\
 2) \begin{array}{l} a_2 b_2 c_1 \\ a_2 b_3 \\ a_2 b_4 \end{array} & 3) \begin{array}{l} a_3 b_2 \\ a_3 b_3 c_1 \\ a_3 b_4 \end{array} & 4) \begin{array}{l} a_4 b_2 \\ a_4 b_3 \\ a_4 b_4 c_1 \end{array}
 \end{array}$$

Bemerkt man nun in Betreff der Ausfüllung der noch übrig gebliebenen Lücken, dass man dabei in jeder Gruppe nur über zwei solche Punkte  $c$  verfügen kann, welche dieselben Indices tragen, wie die in den Lücken vorkommenden Punkte  $b$ , so hat man nur die Alternative, dem  $c$  entweder denselben Index zu geben, welchen  $b$  trägt, oder den andern. Allein zwei Punkte  $b, c$ , welche denselben Index tragen, gehören wegen der Gruppe 1) allemal zu  $a_1$ , man muss also dem  $c$  jedesmal den anderen Index geben, sodass die Lücken folgendermassen auszufüllen sind:

$$\begin{array}{lll} 2) & a_2 b_3 c_4 & 3) & a_3 b_2 c_4 \\ & a_2 b_4 c_3 & & a_3 b_4 c_2 \end{array} \quad 4) \begin{array}{l} a_4 b_2 c_3 \\ a_4 b_3 c_2 \end{array}$$

Vgl. hierzu [492].

Bemerkung. Die Vertheilung der Indices auf je drei in grader Linie liegende Punkte lässt sich in folgende Regeln fassen:

- 1) Sind die Indices zweier Punkte einander gleich, so trägt der dritte den Index 1.
- 2) Sind die Indices zweier Punkte von einander verschieden, und einer von ihnen 1, so sind die beiden anderen einander gleich.
- 3) Sind die Indices zweier Punkte von einander verschieden und keiner von beiden 1, so erhält der dritte Punkt den dritten von 1 verschiedenen Index.

Bezeichnet man demgemäss die Indices 2, 3, 4 in beliebiger Anordnung mit  $h, i, k$ , so sind alle Geraden von einer der folgenden fünf Formen:

$$a_1 b_1 c_1, \quad a_1 b_h c_h, \quad a_h b_1 c_h, \quad a_h b_h c_1, \quad a_h b_i c_k.$$

Die vier durch denselben Punkt, z. B.  $a_k$  gehenden Geraden sind daher folgende:

$$a_k b_1 c_k, \quad a_k b_h c_i, \quad a_k b_i c_h, \quad a_k b_k c_1.$$

Ausserdem ist für späteres nützlich zu bemerken, dass immer gleichzeitig folgende Geradenpaare existiren:

$$\begin{array}{ll} a_1 b_1 c_1 & \text{und} \quad a_h b_1 c_h \\ a_1 b_h c_h & \quad a_h b_h c_1 \\ a_1 b_i c_i & \text{und} \quad a_k b_i c_h \\ a_1 b_h c_h & \quad a_k b_h c_i \end{array}$$



**386.** Aus diesen 16 Geraden lassen sich acht Gruppen zu je vier bilden, so dass jede Gruppe alle 12 Berührungspunkte enthält. Diese acht Gruppen ergeben sich aus [385] als folgende:

$a_1 b_1 c_1$	$a_1 b_1 c_1$	$a_1 b_2 c_2$	$a_1 b_2 c_2$
$a_2 b_3 c_4$	$a_2 b_4 c_3$	$a_2 b_3 c_4$	$a_2 b_4 c_3$
$a_3 b_4 c_2$	$a_3 b_2 c_4$	$a_3 b_1 c_3$	$a_3 b_3 c_1$
$a_4 b_2 c_3$	$a_4 b_3 c_2$	$a_4 b_4 c_1$	$a_4 b_1 c_4$
$a_1 b_3 c_3$	$a_1 b_3 c_3$	$a_1 b_4 c_4$	$a_1 b_4 c_4$
$a_2 b_1 c_2$	$a_2 b_2 c_1$	$a_2 b_1 c_2$	$a_2 b_2 c_1$
$a_3 b_2 c_4$	$a_3 b_4 c_2$	$a_3 b_3 c_1$	$a_3 b_1 c_3$
$a_4 b_4 c_1$	$a_4 b_1 c_4$	$a_4 b_2 c_3$	$a_4 b_3 c_2$

(Hesse. Ueber Curven 3. O. etc. Crelle's Journ. Bd. 36. pag. 153. Cremona art. 149. Zusatz in Curtze's Uebersetzung.)

**387.** Legt man die drei in gerader Linie liegenden Curvenpunkte [385] in drei Wendepunkte, so fällt je ein Berührungspunkt  $a, b, c$  mit einem Wendepunkt  $w, w', w''$  zusammen. Setzt man diese an Stelle von  $a_1, b_1, c_1$ , so gehen von den Geraden in [385] folgende durch einen der Wendepunkte:

$$\begin{array}{lll} w b_2 c_2 & w' a_2 c_2 & w'' a_2 b_2 \\ w b_3 c_3 & w' a_3 c_3 & w'' a_3 b_3 \\ w b_4 c_4 & w' a_4 c_4 & w'' a_4 b_4. \end{array}$$

(Vgl. 549.)

**388.** Zieht man aus einem Curvenpunkte  $\alpha$  die vier Tangenten an die Curve mit den Berührungspunkten  $a_1 a_2 a_3 a_4$ , und aus einem derselben z. B.  $a_1$  aufs Neue vier Tangenten mit den Berührungspunkten  $b_1 b_2 b_3 b_4$ , so sind die drei anderen  $a_2 a_3 a_4$  die Diagonalepunkte des vollständigen Vierecks  $b_1 b_2 b_3 b_4$ .

**Beweis 1.** Lässt man in [385] die Punkte  $\beta, \gamma$  zusammenfallen, so fallen auch  $c_1 c_2 c_3 c_4$  resp. mit  $b_1 b_2 b_3 b_4$  zusammen. Ferner ist dann  $\alpha \beta$  Tangente der Curve, und zwar  $\beta$  Berührungspunkt,  $\alpha$  Tangentialpunkt. Setzt man nun in dem Schema der 16 Geraden in [385] überall  $b$  statt  $c$ , so verwandelt sich dasselbe mit Weglassung der nun identisch werdenden Geraden in Folgendes:

$$\begin{array}{cccc}
 a_1 b_1 b_1 & a_2 b_1 b_2 & a_3 b_1 b_3 & a_4 b_1 b_4 \\
 a_1 b_2 b_2 & a_2 b_3 b_4 & a_3 b_2 b_4 & a_4 b_2 b_3 \\
 a_1 b_3 b_3 & & & \\
 a_1 b_4 b_4 & & &
 \end{array}$$

Demnach ist  $a_1$  der gemeinschaftliche Tangentialpunkt für das Punctquadrupel [378]  $b_1 b_2 b_3 b_4$ , und die drei anderen Punkte  $a_2 a_3 a_4$  sind die Durchschnitte

$$a_2 = (b_1 b_2, b_3 b_4), a_3 = (b_1 b_3, b_2 b_4), a_4 = (b_1 b_4, b_2 b_3).$$

(*Salmon*. pag. 134. *Cremona*. art. 146. a.)

Beweis 2. S. [409].

389. Ist  $\alpha$  ein Wendepunct,  $a_1$  der Berührungspunct einer aus  $\alpha$  an die Curve gehenden Tangente, und zieht man aus  $a_1$  die vier Tangenten mit den Berührungspuncten  $b_1 b_2 b_3 b_4$ , so schneiden sich von den drei Paaren gegenüberliegender Seiten des vollständigen Vierecks  $b_1 b_2 b_3 b_4$  zwei auf der harmonischen Polare von  $\alpha$  und das dritte in  $\alpha$  selbst.

Beweis. Sind  $a_1 a_2 a_3 a_4$  wie in [388] die Berührungspuncte der aus  $\alpha$  gezogenen Tangenten, so fällt, wenn  $\alpha$  ein Wendepunct ist, einer, z. B.  $a_4$  in den Wendepunct, und die drei anderen  $a_1 a_2 a_3$  liegen auf der harmonischen Polare von  $\alpha$  [341]. Nun sind [388]  $a_2 a_3 a_4$  die Schnittpuncte der Seitenpaare  $(b_1 b_2, b_3 b_4)$ ,  $(b_1 b_3, b_2 b_4)$ ,  $(b_1 b_4, b_2 b_3)$ ; daher liegen von diesen die beiden ersten auf der harmonischen Polare von  $\alpha$ , und der dritte fällt in den Wendepunct  $\alpha$ . (Vgl. auch [369] und [344]).

390. Wenn die Tangentialpuncte  $\alpha \beta \gamma$  dreier Curvenpuncte  $a b c$  in gerader Linie liegen, so liegen auch die Puncte  $a' b' c'$ , in welchen die Geraden  $bc, ca, ab$  die Curve schneiden, in gerader Linie, und da alsdann  $abca'b'c'$  die auf der Curve liegenden sechs Ecken eines vollständigen Vierseits bilden, so sind nach [379]  $aa', bb', cc'$  drei Paare correspondirender Puncte.

Beweis. Liegen  $abc$  in gerader Linie, so versteht sich der Satz von selbst. Liegen aber  $abc$  nicht in einer Geraden, so können sie, wenn man die Bezeichnung von [385] anwendet, nur in folgenden vier verschiedenen Combinationen

auftreten: (die aus der Vertauschung der Buchstaben  $a b c$  untereinander ausserdem noch hervorgehenden Anordnungen sind dabei als unwesentlich nicht mit berücksichtigt)

1)  $a_1 b_1 c_h$ , 2)  $a_1 b_h c_i$  3)  $a_h b_h c_h$  4)  $a_h b_h c_i$ .

Zieht man nun jedesmal die Geraden  $bc$ ,  $ca$ ,  $ab$  und sucht die dritten Durchschnittspunkte auf, so findet man nach [385]

1)  $b_1 c_h a_h$  2)  $b_h c_i a_h$ , 3)  $b_h c_h a_1$  4)  $b_h c_i a_k$   
 $c_h a_1 b_h$        $c_i a_1 b_i$        $c_h a_h b_1$        $c_i a_h b_k$   
 $a_1 b_1 c_1$        $a_1 b_h c_h$        $a_h b_h c_1$        $a_h b_h c_1$ .

Die Punkte  $a'b'c'$  sind daher der Reihe nach

1)  $a_h b_h c_1$  2)  $a_k b_i c_h$  3)  $a_1 b_1 c_1$  4)  $a_k b_k c_1$ ,

und diese liegen nach [385] jedesmal in einer Geraden. Vgl. [227] und [383, Bem.]

#### §. 4.

**391.** Seien  $\alpha \beta \gamma$  drei in gerader Linie liegende Curvenpunkte. Zieht man aus  $\beta$  und  $\gamma$  die Tangenten an die Curve und sucht die Durchschnitte je einer Tangente aus  $\beta$  mit je einer aus  $\gamma$  auf, so giebt es unter diesen Schnittpunkten solche, deren Verbindungslinie durch einen Berührungspunkt der aus  $\alpha$  an die Curve gelegten Tangenten geht.

Um diese Verbindungslinien zu finden, sei  $A_1$  eine aus  $\alpha$  an die Curve gehende Tangente mit dem Berührungspunkte  $a_1$ . Durch diesen Punkt gehen nach [385] vier Gerade, welche die Berührungspunkte je einer aus  $\beta$  und  $\gamma$  gezogenen Tangente enthalten. Man nehme zwei dieser Geraden z. B. unter Beibehaltung der in [385] gewählten Bezeichnung,  $a_1 b_1 c_1$  und  $a_1 b_2 c_2$  und bezeichne die Berührungspunkte  $b_1, b_2$  und  $c_1, c_2$  tragenden Tangenten aus  $\beta$  und  $\gamma$  resp. mit  $B_1, B_2$  und  $C_1, C_2$ . Bezeichnet man ferner die Gleichungen der Geraden  $a_1 b_1 c_1$ ,  $a_1 b_2 c_2$ ,  $\alpha \beta \gamma$  resp. mit  $D_1 = 0$ ,  $D_2 = 0$ ,  $F = 0$  (nach [230] ist  $F$  die Begleiterin sowohl von  $D_1$  als auch von  $D_2$ ), so kann man die Gleichung der Curve nach [245 Bew. 2] ebensowohl in der Form

$$A_1 B_1 C_1 - D_1^2 F = 0,$$

wie auch in der Form

$$A_1 B_2 C_2 - D_2^2 F = 0$$

schreiben. Die linken Theile dieser Gleichungen können sich daher nur durch einen constanten Factor  $\lambda^2$  unterscheiden. Demnach ist

$$A_1 B_1 C_1 - D_1^2 F \equiv \lambda^2 (A_1 B_2 C_2 - D_2^2 F)$$

oder

$$A_1 (B_1 C_1 - \lambda^2 B_2 C_2) \equiv F (D_1 + \lambda D_2) (D_1 - \lambda D_2).$$

Da nun in dieser Gleichung der rechte Theil aus drei linearen Factoren besteht, so muss dasselbe bei dem linken Theile stattfinden, also muss der Kegelschnitt

$$B_1 C_1 - \lambda^2 B_2 C_2 = 0$$

aus zwei Geraden bestehen. Dieser Kegelschnitt geht durch die vier Puncte

$$(B_1 B_2), (C_1 C_2), (B_1 C_2), (B_2 C_1),$$

von welchen die beiden ersten  $\beta, \gamma$  sind, und die beiden letzten mit

$$(B_1 C_2) = \kappa'_{12} (B_2 C_1) = \lambda'_{21}$$

bezeichnet werden mögen. Nun ist  $\beta\gamma$  die Gerade  $F$ , und diese kommt rechter Hand vor, daher muss sie auch linker Hand vorkommen und eine der beiden den Kegelschnitt zusammensetzenden Geraden bilden, mithin ist die andere  $\kappa'_{12} \lambda'_{21}$ . Demnach hat man

$$\kappa'_{12} \lambda'_{21} \equiv D_1 \pm \lambda D_2$$

und dann

$$A_1 \equiv D_1 \mp \lambda D_2.$$

Die Verbindungslinie  $\kappa'_{12} \lambda'_{21}$ , oder  $(B_1 C_2, B_2 C_1)$  geht also durch  $(D_1 D_2) = a_1$  hindurch, und ausserdem sind  $D_1, D_2$  und  $\kappa'_{12} \lambda'_{21}, A_1$  zwei Paare zugeordneter harmonischer Strahlen. (*Salmon. pag. 135. Cremona art. 149. b.*)

**392.** Diese Betrachtung lehrt nun genauer kennen, welche Tangentenschnittpuncte mit jedem der Berührungspuncte  $a$  in gerader Linie liegen. Es lässt sich nämlich daraus folgende Regel ableiten: Man wähle unter den vier nach [385] durch einen der Puncte  $a$  gehenden Geraden irgend zwei aus und nehme diejenigen zwei Tangentenpaare aus  $\beta$  und  $\gamma$ , deren Berührungspuncte auf diesen beiden Geraden liegen. Dann geht durch den Punct  $a$  die Verbindungslinie derjenigen zwei Tangentenschnittpuncte, die man erhält, wenn man je zwei dieser Tangenten zum Durchschnitt bringt, deren Berührungspuncte nicht beide zugleich auf einer der

beiden durch  $a$  gehenden Geraden liegen. Wählt man z. B. unter den vier nach [385] durch  $a_k$  gehenden Geraden

$$a_k b_h c_i, a_k b_i c_h, a_k b_1 c_k, a_k b_k c_1$$

die beiden:  $a_k b_i c_h, a_k b_1 c_k$  aus, so geht durch  $a_k$  die Verbindungslinie der Durchschnittspuncte  $(B_i C_k)$  und  $(B_1 C_h)$ ; (dabei sind die Tangenten  $B$  oder  $C$  immer mit demselben Index bezeichnet, welchen der zugehörige Berührungspunct  $b$  oder  $c$  trägt.) Ausserdem hat [391] ergeben, dass diese Verbindungslinie harmonisch zugeordnet ist zu der Tangente  $a_k \alpha$  in Beziehung auf die beiden gewählten Geraden  $a_k b_i c_h, a_k b_1 c_k$ . Dabei bemerke man zugleich, dass die Berührungspuncte der zum Durchschnitt gebrachten Tangenten ebenfalls in zwei Geraden liegen, die sich aber in einem anderen Punkte  $a$  schneiden; nämlich nach [385] gehen in unserem Beispiele  $b_i c_k$  und  $b_1 c_h$  beide durch  $a_h$ . Endlich ergibt sich hieraus, dass wenn man einen der Tangentenschnittpuncte mit einem der Punkte  $a$  verbindet, welcher mit den Berührungspuncten der zum Durchschnitt gebrachten Tangenten nicht in gerader Linie liegt, diese Gerade jedesmal durch einen neuen Tangentenschnittpunct geht. Z. B. Bei  $B_i C_k$  liegen  $b_i c_k$  in gerader Linie mit  $a_h$ ; dagegen trifft die Gerade

durch  $(B_i C_k)$  u.  $a_k$  den Punct  $(B_1 C_h)$  wegen des Geradenp.  $a_k b_i c_h$

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & & & & a_k b_1 c_k \\ ,, & (B_i C_k) & ,, & a_i & ,, & & (B_h C_1) & ,, & ,, & a_i b_h c_k \\ & & & & & & & & & a_i b_i c_1 \\ ,, & (B_i C_k) & ,, & a_1 & ,, & & (B_k C_i) & ,, & ,, & a_1 b_i c_i \\ & & & & & & & & & a_1 b_k c_k. \end{array}$$

393. Da durch jeden der Berührungspuncte  $a$  nach [385] vier Geraden gehen, die noch je zwei Berührungspuncte  $b$  und  $c$  enthalten, und da man diese vier Geraden auf sechs verschiedene Arten zu je zweien combiniren kann, so gehen durch jeden Punct  $a$  sechs Verbindungslinien von Tangentenschnittpuncten.

Um das ganze Tableau dieser Verbindungslinien aufzustellen, seien  $B_1 B_2 B_3 B_4$  die vier aus  $\beta$ , und  $C_1 C_2 C_3 C_4$  die aus  $\gamma$  ausgehenden Tangenten, und die Durchschnitte der letzteren mit den ersteren mögen der in [377] gewählten Bezeichnung entsprechend, wie nachstehend bezeichnet werden:

$B_1$	$B_2$	$B_3$	$B_4$				
$C_1$	$C_2$	$C_3$	$C_4$	$\kappa_{11}$	$\lambda_{22}$	$\mu_{33}$	$\nu_{44}$
$C_2$	$C_1$	$C_4$	$C_3$	$\kappa'_{12}$	$\lambda'_{21}$	$\mu'_{34}$	$\nu'_{43}$
$C_3$	$C_4$	$C_1$	$C_2$	$\kappa''_{13}$	$\lambda''_{24}$	$\mu''_{31}$	$\nu''_{42}$
$C_4$	$C_3$	$C_2$	$C_1$	$\kappa'''_{14}$	$\lambda'''_{23}$	$\mu'''_{32}$	$\nu'''_{41}$

wobei der hinzugefügte Doppelindex sogleich die sich durchschneidenden Tangenten erkennen lässt. Man kann hiermit folgende Tabelle entwerfen:

Geradenpaare durch die Berührungspunkte nach [385].	Verbindungsline der Tangentenschnittpunkte.	Die letztere ist in Beziehung auf die beiden ersten harmonisch zugeordnet zu
$a_1 b_1 c_1$ $a_1 b_2 c_2$ $a_1 b_1 c_1$ $a_1 b_3 c_3$ $a_1 b_1 c_1$ $a_1 b_4 c_4$ $a_1 b_2 c_2$ $a_1 b_3 c_3$ $a_1 b_2 c_2$ $a_1 b_4 c_4$ $a_1 b_3 c_3$ $a_1 b_4 c_4$	$a_1 \kappa'_{12} \lambda'_{21}$ $a_1 \kappa''_{13} \mu''_{31}$ $a_1 \kappa'''_{14} \nu'''_{41}$ $a_1 \lambda'''_{23} \mu'''_{32}$ $a_1 \lambda''_{24} \nu''_{42}$ $a_1 \mu'_{34} \nu'_{43}$	$a_1 \alpha$
$a_2 b_1 c_2$ $a_2 b_2 c_1$ $a_2 b_1 c_2$ $a_2 b_3 c_4$ $a_2 b_1 c_2$ $a_2 b_4 c_3$ $a_2 b_2 c_1$ $a_2 b_3 c_4$ $a_2 b_2 c_1$ $a_2 b_4 c_3$ $a_2 b_3 c_4$ $a_2 b_4 c_3$	$a_2 \kappa_{11} \lambda_{22}$ $a_2 \kappa'''_{14} \mu'''_{32}$ $a_2 \kappa''_{13} \nu''_{42}$ $a_2 \lambda''_{24} \mu''_{31}$ $a_2 \lambda'''_{23} \nu'''_{41}$ $a_2 \mu_{33} \nu_{44}$	$a_2 \alpha$
$a_3 b_1 c_3$ $a_3 b_2 c_4$ $a_3 b_1 c_3$ $a_3 b_3 c_1$ $a_3 b_1 c_3$ $a_3 b_4 c_2$ $a_3 b_2 c_4$ $a_3 b_3 c_1$ $a_3 b_2 c_4$ $a_3 b_4 c_2$ $a_3 b_3 c_1$ $a_3 b_4 c_2$	$a_3 \kappa'''_{14} \lambda'''_{23}$ $a_3 \kappa_{11} \mu_{33}$ $a_3 \kappa'_{12} \nu'_{43}$ $a_3 \lambda'_{21} \mu'_{34}$ $a_2 \lambda_{22} \nu_{44}$ $a_3 \mu'''_{32} \nu'''_{41}$	$a_3 \alpha$
$a_4 b_1 c_4$ $a_4 b_2 c_3$ $a_4 b_1 c_4$ $a_4 b_3 c_2$ $a_4 b_1 c_4$ $a_4 b_4 c_1$ $a_4 b_2 c_3$ $a_4 b_3 c_2$ $a_4 b_2 c_3$ $a_4 b_4 c_1$ $a_4 b_3 c_2$ $a_4 b_4 c_1$	$a_4 \kappa''_{13} \lambda''_{24}$ $a_4 \kappa'_{12} \mu'_{34}$ $a_4 \kappa_{11} \nu_{44}$ $a_4 \lambda_{22} \mu_{33}$ $a_4 \lambda'_{21} \nu'_{43}$ $a_4 \mu'_{31} \nu'_{42}$	$a_4 \alpha$

394. Aus dem Vorigen folgt ferner, was auch die Tabelle bestätigt, dass durch jeden Tangentenschnittpunct drei der in Rede stehenden Verbindungslinien gehen, und zwar gehen diese durch diejenigen drei Punkte  $a$ , welche mit den Berührungspuncten der zu dem betrachteten Schnittpunct combinirten Tangenten nicht in gerader Linie liegen, während die Verbindungslinie dieser Berührungspuncte selbst den vierten Punct  $a$  enthält. So gehen z. B. durch den Punct  $\kappa_{11}$  d. i. ( $B_1, C_1$ ) die drei Geraden

$$a_2 \kappa_{11} \lambda_{22}, \quad a_3 \kappa_{11} \mu_{33}, \quad a_4 \kappa_{11} \nu_{44},$$

während die Berührungspuncte der Tangenten  $B_1, C_1$ , nämlich  $b_1, c_1$  mit  $a_1$  in gerader Linie liegen. Nimmt man daher die vier Tangentenpaare, deren Berührungspuncte mit dem nämlichen Puncte  $a$  in gerader Linie liegen, sodass dabei also alle acht Tangenten zur Verwendung gelangen, so bilden deren Durchschnitte ein vollständiges Viereck, dessen Diagonalpuncte die drei anderen Punkte  $a$  sind. Auf diese Art theilen sich die 16 Schnittpuncte der zwei Mal vier Tangenten  $B$  und  $C$  in vier Gruppen zu je vieren, so dass jede Gruppe eines der erwähnten vollständigen Vierecke bildet. Diese sind

$\kappa_{11}$	$\lambda_{22}$	$\mu_{33}$	$\nu_{44}$	mit den Diagonalpuncten $a_2 a_3 a_4$			
$\kappa'_{12}$	$\lambda'_{21}$	$\mu'_{34}$	$\nu'_{43}$	„	„	„	$a_3 a_4 a_1$
$\kappa''_{13}$	$\lambda''_{24}$	$\mu''_{31}$	$\nu''_{42}$	„	„	„	$a_4 a_1 a_2$
$\kappa'''_{14}$	$\lambda'''_{23}$	$\mu'''_{32}$	$\nu'''_{41}$	„	„	„	$a_1 a_2 a_3$

(Cremona art. 149. d.)

395. Man kann nun zeigen, dass die Ecken jedes dieser vollständigen Vierecke gerade die Tangentenschnittpuncte sind, welche nach [377] mit den Tangentialpuncten  $\beta$  und  $\gamma$  in einem Kegelschnitte liegen, indem man direct nachweist, dass die von diesen beiden Puncten ausgehenden Tangentenbüschel  $B_1 B_2 B_3 B_4$  und  $C_1 C_2 C_3 C_4$  projectivisch sind, und damit zugleich einen zweiten Beweis des Satzes [376] liefern.

Zu dem Ende bemerke man folgendes: Zieht man aus einem der Punkte  $a$  Strahlen nach den Durchschnitten einer Tangente  $B$  mit den vier Tangenten  $C$ , so wird jedesmal einer dieser Durchschnitte von zwei Tangenten gebildet, deren Berührungspuncte mit  $a$  in gerader Linie liegen, sodass nach

[394] der durch diesen Schnittpunct gehende Strahl keinen neuen Tangentenschnittpunct trifft. Die übrigen drei Strahlen aber treffen neue Tangentenschnittpuncte und zwar solche, die alle auf derjenigen Tangente  $C$  liegen, welche  $B$  in dem zuerst erwähnten Puncte trifft. Bezeichnet man, um dies zu übersehen, die Indices 2, 3, 4 wieder mit  $h, i, k$ , so können die Fälle eintreten, dass entweder der Punct  $a$ , oder die Tangente  $B$ , oder beide, oder endlich keiner von beiden den Index 1 trägt, wobei in dem letzten Falle noch zu unterscheiden ist, ob die Indices von  $a$  und  $B$  gleich oder verschieden sind. Bestimmt man nun in jedem Falle nach der in [392] gegebenen Regel mit Rücksicht auf [385] die zusammengehörigen Schnittpuncte, so erhält man folgendes:

1) Ist der Punct  $a_1$ , die Tangente  $B_1$ , so gehen die Verbindungslinien von  $a_1$  mit  $B_1C_1$   $B_1C_h$   $B_1C_i$   $B_1C_k$  auf's Neue durch  $B_hC_1$   $B_iC_1$   $B_kC_1$ , und die neuen Schnittpuncte liegen auf  $C_1$ .

2) Ist der Punct  $a_1$ , die Tangente  $B_h$ , so gehen die Verbindungslinien von  $a_1$  mit  $B_hC_1$   $B_hC_h$   $B_hC_i$   $B_hC_k$  auf's Neue durch  $B_1C_h$   $B_iC_h$   $B_kC_h$ , und die neuen Schnittpuncte liegen auf  $C_h$ .

3) Ist der Punct  $a_h$ , die Tangente  $B_1$ , so gehen die Verbindungslinien von  $a_h$  mit  $B_1C_1$   $B_1C_h$   $B_1C_i$   $B_1C_k$  auf's Neue durch  $B_hC_h$   $B_kC_h$   $B_iC_h$ , und die neuen Schnittpuncte liegen auf  $C_h$ .

4) Ist der Punct  $a_h$ , die Tangente  $B_h$ , so gehen die Verbindungslinien von  $a_h$  mit  $B_hC_1$   $B_hC_h$   $B_hC_i$   $B_hC_k$  auf's Neue durch  $B_1C_1$   $B_kC_1$   $B_iC_1$ , und die neuen Schnittpuncte liegen auf  $C_1$ .

5) Ist der Punct  $a_h$ , die Tangente  $B_i$ , so gehen die Verbindungslinien von  $a_h$  mit  $B_iC_1$   $B_iC_h$   $B_iC_i$   $B_iC_k$  auf's Neue durch  $B_hC_k$   $B_1C_k$   $B_kC_k$  —.

Es tritt also das Behauptete in allen Fällen ein, das sich nun auch so aussprechen lässt: Die von einem der Puncte  $a$  nach den Schnittpuncten einer Tangente  $B$  mit den vier Tangenten  $C$  gehenden Strahlen treffen eine der Tangenten  $C$  in den vier Durchschnittspuncten derselben mit den vier Tangenten  $B$ ; und zwar gehören der Puncta, die erstere Tan-



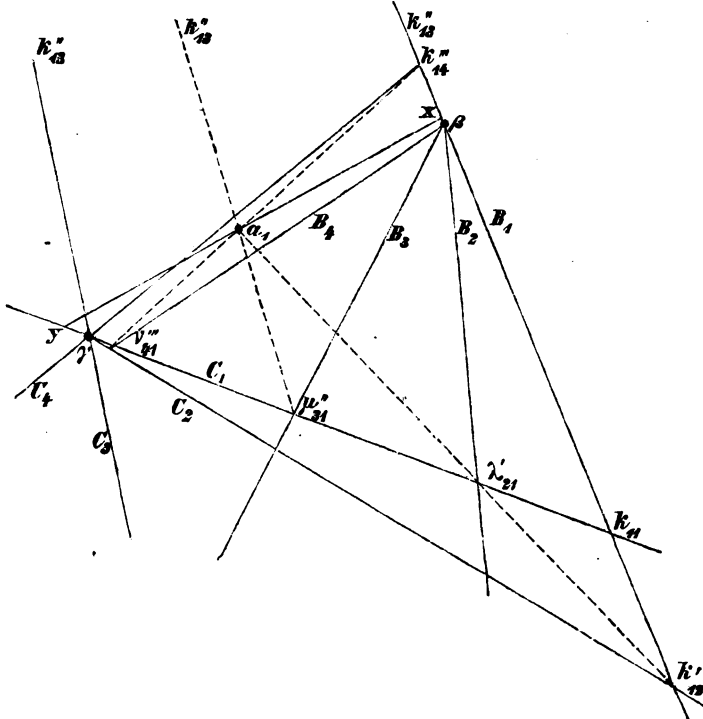
gente  $B$  und die letztere  $C$  in derselben Art zusammen, wie drei in gerader Linie liegende Berührungspuncte, nämlich

$$a_1 B_1 C_1 \quad a_1 B_h C_h \quad a_h B_1 C_h \quad a_h B_h C_1 \quad a_h B_i C_k.$$

Wir knüpfen nun die weitere Erörterung an einen bestimmten Fall an, da aus dem oben Gesagten hervorgeht, dass die übrigen Fälle ebenso behandelt werden können.

Betrachten wir die Strahlen aus  $a_1$  nach den Durchschnitten  $\kappa_{11}$ ,  $\kappa'_{12}$ ,  $\kappa''_{13}$ ,  $\kappa'''_{14}$  von  $B_1$  mit den vier Tangenten  $C$ ,

Fig. 33.



(Fig. 33.), so liegt der Büschel der letzteren mit dem ersteren Strahlenbüschel perspectivisch, daher ist

$$a_1 (\kappa_{11}, \kappa'_{12}, \kappa''_{13}, \kappa'''_{14}) \overline{\wedge} \gamma (C_1 C_2 C_3 C_4).$$

Nun schneiden aber die vier Strahlen aus  $a_1$  die Tangente  $C_1$  in den Punkten  $\kappa_{11}$ ,  $\lambda'_{21}$ ,  $\mu''_{31}$ ,  $\nu'''_{41}$ , so dass man statt des vorigen auch schreiben kann

$$a_1 (\kappa_{11}, \lambda'_{21}, \mu''_{31}, \nu'''_{41}) \overline{\wedge} \gamma (C_1 C_2 C_3 C_4),$$

und da diese neuen Punkte die Schnitte von  $C_1$  mit den vier Tangenten  $B$  sind, so ist auch

$$a_1 (\kappa_{11}, \lambda'_{21}, \mu''_{31}, \nu'''_{41}) \overline{\wedge} \beta (B_1 B_2 B_3 B_4),$$

mithin

$$\beta (B_1 B_2 B_3 B_4) \overline{\wedge} \gamma (C_1 C_2 C_3 C_4):$$

und dies ist Satz [376]. Die Schnittpunkte der sich projectivisch entsprechenden Strahlen aber liegen mit  $\beta$  und  $\gamma$  in einem Kegelschnitt und bilden zugleich das vollständige Viereck  $\kappa_{11} \lambda_{22} \mu_{33} \nu_{44}$ , welchem der Punkt  $a_1$  nicht als Diagonalepunkt zugehört. (Cremona. art. 149. c.)

**396.** Verbindet man  $\beta$  und  $\gamma$  durch gerade Linien mit dem Punkte  $a_1$ , welcher in dem vollständigen Viereck  $\kappa_{11} \lambda_{22} \mu_{33} \nu_{44}$  nicht als Diagonalepunkt auftritt, so sind für den Kegelschnitt, welcher durch diese Punkte und durch  $\beta, \gamma$  geht,  $\beta a_1$  und  $\gamma a_1$  die Tangenten in  $\beta$  und  $\gamma$ , d. h.  $a_1$  ist der Pol der Geraden  $\beta\gamma$  in Bezug auf diesen Kegelschnitt.

Beweis. (Fig. 33.) Nach [395] schneiden die projectivischen Strahlenbüschel  $\beta (B_1 B_2 B_3 B_4)$  und  $\gamma (C_1 C_2 C_3 C_4)$  die Tangenten  $C_1$  und  $B_1$  resp. in den Punkten  $\kappa_{11} \lambda'_{21} \mu''_{31} \nu'''_{41}$  und  $\kappa_{11} \kappa'_{12} \kappa''_{13} \kappa'''_{14}$ , und diese liegen paarweise in Strahlen, die von  $a_1$  ausgehen. Man erhält daher auf  $C_1$  und  $B_1$  zwei projectivische und perspectivisch liegende Punktreihen, deren entsprechende Punkte, mit  $\beta$  und  $\gamma$  verbunden, entsprechende Strahlen dieser beiden Strahlenbüschel liefern. Zieht man also durch  $a_1$  eine beliebige Gerade, welche  $C_1$  und  $B_1$  in  $y$  und  $x$  schneidet, so sind  $\beta y$  und  $\gamma x$  entsprechende Strahlen und schneiden sich daher auf dem in Rede stehenden Kegelschnitt. Rückt aber  $x$  nach  $\beta$ , so verwandeln sich  $\beta y$  und  $\gamma x$  in  $\beta a_1$  und  $\gamma \beta$ , und da nun  $\beta a_1$  der Verbindungslinie  $\beta\gamma$  der beiden Mittelpunkte der Strahlenbüschel entspricht, so berührt  $\beta a_1$  den Kegelschnitt in  $\beta$ . Rückt dagegen  $y$  nach  $\gamma$ , so entsprechen sich  $\beta\gamma$  und  $\gamma a_1$  und daher berührt auch  $\gamma a_1$  den Kegelschnitt in  $\gamma$ . (Salmon. Théorèmes sur les courbes de 3. degré. Crelle's Journ. Bd. 42. Cremona. art. 149. e.)

**397.** Wendet man dieselbe Betrachtung auch auf  $a_2, a_3, a_4$  an, so folgt: Legt man aus zwei Punkten  $\beta\gamma$ , einer

Curve 3. O. die Tangenten an dieselbe, so liegen die Pole der Geraden  $\beta\gamma$  in Beziehung auf die vier Kegelschnitte, in denen sich die 16 Durchschnitte jener Tangenten befinden [377], auf der Curve und bilden das Punctquadrupel, dessen Tangentialpunct der Punct  $\alpha$  ist, in welchem  $\beta\gamma$  die Curve trifft. (*Cremona*. art. 149. e.)

398. Und daher: Die Pole von  $\beta\gamma$  in Beziehung auf drei beliebige jener vier Kegelschnitte sind die Diagonalepuncte des vollständigen Vierecks, dessen Ecken gebildet werden von denjenigen vier Tangentenschnittpuncten, die auf dem vierten Kegelschnitte liegen. (*Cremona*. art. 149. e.)

399. Endlich folgt noch aus [394]: Verbindet man die Berührungspuncte derjenigen vier Tangentenpaare, deren Durchschnitte auf demselben Kegelschnitte liegen, durch gerade Linien, so schneiden sich diese in demjenigen Puncte  $a$ , der in dem Viereck der Tangentenschnittpuncte nicht als Diagonalepunct auftritt.

### §. 5.

400. Nimmt man vier beliebige Puncte  $p_1 p_2 p_3 p_4$  als Basispuncte eines Kegelschnittbüschels und bestimmt zu einem beliebigen fünften Puncte  $p$  die Polaren in Bezug auf sämtliche Kegelschnitte des Büschels, so schneiden sich diese Polaren in einem Puncte  $q$  (dem zu  $p$  in Beziehung auf den Kegelschnittbüschel conjugirten Pole) [111], und bilden einen Strahlenbüschel, welcher mit dem Kegelschnittbüschel projectivisch ist [114]. Erzeugt man nun durch diese beiden Büschel nach [236] eine Curve 3. O., so ist diese zugleich der geometrische Ort der Berührungspuncte der von  $p$  an die Kegelschnitte gehenden Tangenten. (*Salmon*. On curves of the third order. Phil. Trans. vol. 148. pag. 535.)

Beweis. Die Curvenpuncte sind die Durchschnitte jedes Strahles mit dem ihm entsprechenden Kegelschnitte [236]. Da nun hier jeder Strahl demjenigen Kegelschnitte entspricht, welchem der Strahl als Polare von  $p$  zugehört, so sind jene Durchschnitte zugleich die Berührungspuncte der aus  $p$  an den Kegelschnitt gehenden Tangenten [96]. (*Cremona*. art. 147.)

401. Die nach [400] erzeugte Curve 3. O. geht nicht

bloss durch die Basispunkte  $p_1 p_2 p_3 p_4$  des Kegelschnittbüschels, und durch den Mittelpunkt  $q$  des Strahlenbüschels [236], sondern sie geht auch durch  $p$  und berührt hier den durch  $p$  gehenden Kegelschnitt  $K$  des Büschels.

Beweis. Die Tangente an  $K$  in  $p$  ist die Polare von  $p$  in Bezug auf  $K$  [99]; sie geht daher durch  $q$  und bildet den dem Kegelschnitt  $K$  entsprechenden Strahl; die beiden zugehörigen Curvenpuncte fallen also in  $p$  zusammen, und folglich haben  $K$  und die Curve im Puncte  $p$  die Gerade  $pq$  zur gemeinschaftlichen Tangente. (*Cremona. art. 147.*)

402. Legt man durch  $p$  eine beliebige Gerade  $G$ , so sind die Durchschnitte  $s_1 s_2$  derselben mit der Curve 3. O. die Doppelpuncte der Involution, welche nach [115] auf der Geraden  $G$  durch den Kegelschnittbüschel [ $p_1 p_2 p_3 p_4$ ] erzeugt wird.

Beweis. Nach [400] sind  $s_1 s_2$  die Puncte, in welchen die Gerade  $G$  Kegelschnitte des Büschels berührt. Diese berührt aber nach [118] in der That zwei derselben, und zwar sind die Berührungspuncte die Doppelpuncte der erwähnten Involution. (*Cremona. art. 147.*)

403. Bei der nach [400] erzeugten Curve 3. O. sind die Geraden  $pp_1, pp_2, pp_3, pp_4$  die von  $p$  an die Curve gehenden Tangenten, also  $p_1 p_2 p_3 p_4$  das zu  $p$  als Tangentialpunct zugehörige Punctquadrupel.

Beweis. Die Durchschnitte der Geraden  $pp_1$  mit der Curve sind nach [402] die Puncte, in denen zwei Kegelschnitte des Büschels [ $p_1 p_2 p_3 p_4$ ] diese Gerade berühren. Da aber diese Kegelschnitte auch durch  $p_1$  gehen, so müssen die Berührungspuncte beide in  $p_1$  liegen, sonst hätte die Gerade  $pp_1$  mit jedem der beiden Kegelschnitte drei Puncte gemein. Die beiden Durchschnitte der Curve mit der Geraden  $pp_1$  fallen also in  $p_1$  zusammen, oder diese Gerade berührt die Curve in  $p_1$ . Ebenso ist es bei den Puncten  $p_2, p_3, p_4$ . (*Cremona. art. 147.*)

404. Durch ein Punctquadrupel  $p_1 p_2 p_3 p_4$  und den zugehörigen Tangentialpunct  $p$  ist eine Curve 3. O. eindeutig bestimmt, (dabei können diese fünf Puncte beliebig angenommen werden, nur so, dass keine drei von ihnen in ge-

rader Linie liegen); und zwar ist diese Curve die nach [400] erzeugte.

**Beweis.** Da in jedem Punkte des Quadrupels zwei Curvenpunkte auf der durch  $p$  gehenden Tangente vereinigt sind, so hat man im Ganzen neun gegebene Curvenpunkte. Von diesen liegen drei, z. B.  $p$  und die beiden in  $p_1$  vereinigten Punkte in einer Geraden, die übrigen sechs aber liegen paarweise in  $p_2, p_3, p_4$  vereinigt, und zwar so, dass die Verbindungslinie jedes Paares durch  $p$  geht. Daher kann durch die letzteren sechs Punkte niemals ein Kegelschnitt gelegt werden, weil drei Tangenten eines solchen sich niemals in einem Punkte schneiden. Folglich [223] kann durch die obigen neun Punkte nur eine einzige Curve 3. O. gelegt werden. Erzeugt man nun aus den gegebenen Punkten eine Curve 3. O. nach [400], so bilden in dieser nach [403]  $p_1 p_2 p_3 p_4$  ein Quadrupel, dessen Tangentialpunkt  $p$  ist. Mithin ist die letztere Curve 3. O. mit der ersteren identisch.

**405.** Man hat daher zusammenfassend: Die durch ein Punctquadrupel  $p_1 p_2 p_3 p_4$  und den zugehörigen Tangentialpunkt  $p$  bestimmte Curve 3. O. wird auch erzeugt durch den Kegelschnittbüschel  $[p_1 p_2 p_3 p_4]$  und den Strahlenbüschel  $[q]$ , welcher von den Polaren von  $p$  in Beziehung auf die Kegelschnitte des ersteren Büschels gebildet wird, und ist der geometrische Ort der Berührungspunkte der aus  $p$  an die Kegelschnitte des Büschels gehenden Tangenten [400]. — Der durch  $p$  gehende Kegelschnitt dieses Büschels berührt die Curve in  $p$  [401], er ist die conische Polare des Punctes  $p$  [270]; die Tangente in  $p$  ist die Gerade  $pq$  [401]. Die Punkte  $s'_1, s_2$ , in welchen eine durch  $p$  gehende Gerade  $G$  die Curve schneidet, sind die Punkte, in welchen zwei Kegelschnitte des Büschels diese Gerade berühren, und auch die Doppelpunkte der durch den Kegelschnittbüschel auf  $G$  erzeugten Involution [402].

**406.** Legt man durch ein Punctquadrupel einer Curve 3. O. einen Kegelschnitt, und an diesen eine Tangente in einem seiner beiden weiteren Durchschnitte mit der Curve, so geht diese Tangente durch den Tangentialpunkt des Quadrupels. — Aus [405].

**407.** Aufgabe. Wenn eine Curve 3. O. durch ein

Punctquadrupel  $p_1 p_2 p_3 p_4$  und den zugehörigen Tangentialpunct  $p$  gegeben ist, die Durchschnitte  $s_1 s_2$  einer durch  $p$  gehenden Geraden  $G$  mit der Curve zu bestimmen.

**Auflösung.** Man bestimmt die durch den Kegelschnittbüschel  $[p_1 p_2 p_3 p_4]$  auf  $G$  erzeugte Involution, indem man die Durchschnitte von  $G$  mit den Geradenpaaren  $p_1 p_2, p_3 p_4; p_1 p_3, p_2 p_4; p_1 p_4, p_2 p_3$  aufsucht, und construirt nach [75] die Doppelpuncte dieser Involution, so sind diese die gesuchten Puncte  $s_1$  und  $s_2$  [405].

**408.** Nimmt man die Puncte eines Quadrupels als Basispuncte eines Kegelschnittbüschels, so ist der zu dem Tangentialpunct  $p$  des Quadrupels in Bezug auf den Kegelschnittbüschel conjugirte Pol  $q$  der zu  $p$  zugehörige Tangentialpunct. — Aus [405], denn  $q$  liegt auf der Curve, und die Gerade  $pq$  berührt die Curve in  $p$ . (*Cremona art. 147.*)

**409.** Hieraus folgt auf's Neue der Satz [388], dass nämlich die Diagonalpuncte des Vierecks  $p_1 p_2 p_3 p_4$ :

$$p' = (p_1 p_2, p_3 p_4), p'' = (p_1 p_3, p_2 p_4); p''' = (p_1 p_4, p_2 p_3)$$

mit  $p$  zusammen das Punctquadrupel von  $q$  bilden. Denn die Geradenpaare  $(p_1 p_2, p_3 p_4) (p_1 p_3, p_2 p_4) (p_1 p_4, p_2 p_3)$  bilden drei Kegelschnitte des Büschels. Daher vertreten  $pp', pp'', pp'''$  die Stelle von Tangenten und  $p', p'', p'''$  die Stelle von Berührungspuncten. Mithin liegen diese Puncte auf der Curve [405]. Da ferner der Tangentialpunct  $q$  von  $p$  der conjugirte Pol zu  $p$  ist in Bezug auf den Kegelschnittbüschel, so sind  $q(p' p'' p''')$  die Polaren von  $p$  in Bezug auf die drei Geradenpaare, und da jede dieser Polaren den entsprechenden Kegelschnitt (das Geradenpaar) in zwei zusammenfallenden Puncten schneidet, so schneidet sie auch die Curve in zwei zusammenfallenden Puncten und berührt daher die Curve. Demnach bildet  $pp' p'' p'''$  das Quadrupel, welches dem Puncte  $q$  als Tangentialpunct zugehört. (*Cremona art. 147.*)

**410.** Auf der die Curve in  $p$  berührenden Tangente  $pq$  sind  $p$  und dessen Tangentialpunct  $q$  die Doppelpuncte der Involution, welche auf  $pq$  durch den Kegelschnittbüschel  $[p_1 p_2 p_3 p_4]$  erzeugt wird. — Denn in  $p$  und  $q$  (da  $q$  auf der Curve liegt) wird die Gerade  $pq$  von zwei Kegelschnitten des Büschels berührt [405].

228

411. Der einem Punctquadrupel  $p_1 p_2 p_3 p_4$  gegenüberliegende Punct [239] ist der Tangentialpunct  $q$  des Tangentialpunctes  $p$  des Quadrupels, oder der zweite Tangentialpunct des Quadrupels. — Aus [408], denn  $q$  ist zugleich der Mittelpunkt des Strahlenbüschels, welcher mit dem Kegelschnittpunct des Strahlenbüschels  $[p_1 p_2 p_3 p_4]$  die Curve erzeugt [405]. (Cremona art. 147.)

412. Aufgabe. Wenn eine Curve 3. O. durch ein Punctquadrupel  $p_1 p_2 p_3 p_4$  und den zugehörigen Tangentialpunct  $p$  gegeben ist, den Tangentialpunct  $q$  von  $p$ , und das zu  $q$  gehörige Punctquadrupel zu construiren.

Auflösung. An dem durch die fünf gegebenen Punkte  $p p_1 p_2 p_3 p_4$  gehenden Kegelschnitte construiren man die Tangente  $t$  in  $p$ , schneide dieselbe mit einem der drei durch  $p_1 p_2 p_3 p_4$  gehenden Geradenpaare, z. B. mit  $p_1 p_2$  in  $\alpha$  und mit  $p_3 p_4$  in  $\beta$ , und bestimme in Bezug auf  $\alpha\beta$  den zu  $p$  zugeordneten harmonischen Punct, so ist dies der verlangte Tangentialpunct  $q$ . Denn da nach [410]  $p$  der eine Doppelpunct der auf der Tangente  $t$  durch den Kegelschnittbüschel  $[p_1 p_2 p_3 p_4]$  erzeugten Involution ist, so wird in Folge dieser Construction  $q$  der zweite Doppelpunct [40], und daher [410] der verlangte Tangentialpunct. — Bezeichnet man ferner mit  $p' p'' p'''$  die Durchschnitte

$$p' = (p_1 p_2, p_3 p_4), p'' = (p_1 p_3, p_2 p_4), p''' = (p_1 p_4, p_2 p_3),$$

so bilden  $p, p', p'', p'''$  das zu  $q$  gehörige Punctquadrupel [409]. (Em. Weyr l. c. [378] pag. 637.) Vgl. [487.]

413. Wenn der einem Punctquadrupel zugehörige Tangentialpunct  $p$  mit zwei Diagonalpuncten, z. B.  $p', p''$  des Quadrupels in gerader Linie liegt, so ist der dritte Diagonalpunct  $p'''$  ein Wendepunct, und die Gerade  $p' p''$  dessen harmonische Polare. — Aus [374], denn  $p p' p''$  sind nach [409] die Berührungspunkte dreier von einem Curvenpuncte ausgehender Tangenten. Der Berührungspunct  $p'''$  der vierten Tangente aber fällt dann mit dem Wendepuncte zusammen.

414. Wenn vier Punkte  $p_1 p_2 p_3 p_4$  einer Curve 3. O. so liegen, dass die Diagonalpuncte  $p' p'' p'''$  des von jenen gebildeten vollständigen Vierecks sich ebenfalls auf der Curve befinden, so bilden die ersteren vier Punkte ein Punctquadrupel, d. h. sie haben einen gemeinschaftlichen Tangential-

punct, und dieser bildet dann nach [409] mit den Diagonalphuncten  $p' p'' p'''$  ein neues Punctquadrupel. (*Em. Weyr* l. c. [378] pag. 639.)

**Beweis.** Die Geradenpaare  $p'(p_1 p_2, p_3 p_4)$  und  $p''(p_1 p_3, p_2 p_4)$  bilden ein vollständiges Vierseit, dessen Ecken  $p_1 p_2 p_3 p_4 p' p''$  auf der Curve liegen. Nach [379] sind daher die gegenüberliegenden Ecken  $p_1 p_4$  correspondirende Puncte, haben also einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct; ebenso auch  $p_2 p_3$ . Nun bilden aber auch  $p''(p_1 p_3, p_2 p_4)$  und  $p'''(p_1 p_4, p_2 p_3)$  ein vollständiges Vierseit, dessen Ecken  $p_1 p_2 p_3 p_4 p'' p'''$  auf der Curve liegen. Mithin sind auch  $p_1 p_2$  correspondirende Puncte, und ebenso  $p_3 p_4$ , und folglich haben alle vier Puncte denselben Tangentialpunct.

**415.** Alle Curven 3. O., welche durch die Ecken  $p_1 p_2 p_3 p_4$  und die Diagonalphuncte  $p' p'' p'''$  eines vollständigen Vierecks gelegt werden können, haben die ersteren vier Puncte zu einem Punctquadrupel, und der gemeinschaftliche Tangentialpunct des letzteren (der für jede Curve ein anderer sein wird) bildet mit  $p' p'' p'''$  ein neues Punctquadrupel. — Aus [414]. (*Em. Weyr* l. c. [378] pag. 639.)

**416.** Ist von einer Curve 3. O. ein Punctquadrupel gegeben, d. h. vier Puncte von der Beschaffenheit, dass sie einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct besitzen, ohne dass jedoch dieser letztere gegeben ist, so ist die Curve bestimmt, wenn noch zwei weitere Curvenpuncte  $s_1 s_2$  gegeben sind: (Eine Ausnahme siehe [419]). — Denn da die Curve auch immer durch die Diagonalphuncte des Quadrupels geht [409], so sind durch das letztere sieben Curvenpuncte gegeben.

**417. Aufgabe.** Wenn eine Curve 3. O. durch ein Punctquadrupel  $p_1 p_2 p_3 p_4$  und zwei weitere Curvenpuncte  $s_1 s_2$  gegeben ist, den dem Quadrupel zugehörigen Tangentialpunct  $p$  zu construiren.

**Auflösung.** Man construire an den beiden durch  $p_1 p_2 p_3 p_4 s_1$  und durch  $p_1 p_2 p_3 p_4 s_2$  gehenden Kegelschnitten die Tangenten in  $s_1$  und  $s_2$ . Der Durchschnitt dieser beiden Tangenten ist der gesuchte Tangentialpunct  $p$ . — Denn die in einem Schnittpuncte  $s_1$  oder  $s_2$  der Curve mit einem durch das Quadrupel gehenden Kegelschnitte an diesen gelegte Tangente muss durch  $p$  gehen [406]. (*Em. Weyr* l. c. [378] pag. 640.)



418. Für alle Curven 3. O., welche durch die Ecken  $p_1 p_2 p_3 p_4$  und die Diagonalepuncte  $p' p'' p'''$  eines vollständigen Vierecks, und ausserdem durch einen achten Punct  $s_1$  gehen, (welche Curven also [415] die Puncte  $p_1 p_2 p_3 p_4$  zu einem Punctquadrupel haben) liegen die diesem Punctquadrupel zugehörigen Tangentialpuncte  $p$  auf der Geraden  $s_1 s_2$ , welche  $s_1$  mit dem zu  $s_1$  in Bezug auf den Kegelschnittbüschel  $[p_1 p_2 p_3 p_4]$  conjugirten Pole  $s_2$  verbindet.

Beweis. Die Puncte  $s_1, s_2$  sind die Doppelpuncte der auf der Geraden  $s_1 s_2$  durch den Kegelschnittbüschel  $[p_1 p_2 p_3 p_4]$  erzeugten Involution, oder die Puncte, in welchen zwei Kegelschnitte dieses Büschels die Gerade  $s_1 s_2$  berühren [119]. Da also die Gerade  $s_1 s_2$  den Kegelschnitt  $p_1 p_2 p_3 p_4 s_1$  in  $s_1$  und den Kegelschnitt  $p_1 p_2 p_3 p_4 s_2$  in  $s_2$  berührt, so geht sie nach [406] durch  $p$ ; variirt man daher die Curve, während  $p_1 p_2 p_3 p_4$  und  $s_1$ , und folglich auch  $s_2$  fest bleiben, so liegt  $p$  jedesmal auf  $s_1 s_2$ . (*Em. Weyr* l. c. [378] pag. 640.)

419. Alle Curven 3. O., welche durch die in [418] angegebenen acht Puncte gehen, schneiden sich ausserdem in dem zu  $s_1$  in Bezug auf den Kegelschnittbüschel  $[p_1 p_2 p_3 p_4]$  conjugirten Pole  $s_2$ . — Denn aus [418] geht unmittelbar hervor, dass auch  $s_2$  jedesmal auf der Curve liegen muss, da er der Berührungspunct einer aus  $p$  an einen Kegelschnitt des Büschels gehenden Tangente ist. (*Em. Weyr* l. c. [378] pag. 640.)

Zusatz. Hieraus folgt die in [416] erwähnte Ausnahme. Nämlich eine Curve 3. O. ist durch ein Punctquadrupel  $p_1 p_2 p_3 p_4$  und zwei weitere Curvenpuncte  $s_1 s_2$  dann und nur dann nicht eindeutig bestimmt, wenn  $s_1$  und  $s_2$  conjugirte Pole in Bezug auf den Kegelschnittbüschel  $[p_1 p_2 p_3 p_4]$  sind.

420. Aufgabe. Für alle Curven 3. O., welche durch die Ecken  $p_1 p_2 p_3 p_4$  und die Diagonalepuncte  $p' p'' p'''$  eines vollständigen Vierecks und ausserdem durch einen achten Punct  $s_1$  gehen, den gemeinsamen neunten Durchschnittspunct  $s_2$  zu construiren.

Auflösung. Man construire die Polaren von  $s_1$  in Beziehung auf zwei der drei Geradenpaare, welche durch  $p_1 p_2 p_3 p_4$  gehen. Der Durchschnitt dieser beiden Polaren ist der gesuchte Punct  $s_2$ . — Aus [419], denn der so construirte Punct  $s_2$

ist der zu  $s_1$  in Beziehung auf den Kegelschnittbüschel  $[p_1 p_2 p_3 p_4]$  conjugirte Pol. (*Em. Weyr. l. c. [378] pag. 640.*)

421. Zieht man aus einem Curvenpuncte  $\alpha$  eine beliebige Gerade, welche die Curve in  $\beta, \gamma$  schneide, und eine Tangente  $\alpha a_1$  mit dem Berührungspuncte  $a_1$ , ferner aus  $a_1$  die vier Tangenten mit den Berührungspuncten  $p_1 p_2 p_3 p_4$ , so liegen die letzteren vier Puncte mit  $\beta \gamma$  in einem Kegelschnitte.

Beweis. Der dem Punctquadrupel  $p_1 p_2 p_3 p_4$  gegenüberliegende Punct ist  $\alpha$  [411], daher liegen  $\beta \gamma$  mit diesem Quadrupel in einem Kegelschnitte [244 Zus.].

422. Seien  $\alpha, \beta, \gamma$  drei Curvenpuncte in gerader Linie,  $a_1 a_2 a_3 a_4$  das zu  $\alpha$ , und  $p_1 p_2 p_3 p_4$  das zu  $a_1$  gehörige Punctquadrupel, ferner  $B_1 B_2 B_3 B_4$ ;  $C_1 C_2 C_3 C_4$  die resp. aus  $\beta$  und  $\gamma$  an die Curve gehenden Tangenten. Bezeichnet man dann wie in [393] mit  $\kappa_{11} \lambda_{22} \mu_{33} \nu_{44}$  die Tangentenschnittpuncte  $(B_1 C_1), (B_2 C_2), (B_3 C_3), (B_4 C_4)$ , welche nach [395], [377] mit  $\beta \gamma$  in einem Kegelschnitte liegen, so geht dieser Kegelschnitt  $\beta \gamma \kappa_{11} \lambda_{22} \mu_{33} \nu_{44}$  auch durch  $p_1 p_2 p_3 p_4$ .

Beweis. Die Puncte  $a_2 a_3 a_4$  sind nach [394] die Diagonalpuncte des Vierecks  $\kappa_{11} \lambda_{22} \mu_{33} \nu_{44}$ , zugleich aber nach [409], [388] auch die Diagonalpuncte des Vierecks  $p_1 p_2 p_3 p_4$ . Mithin ist [108] das Dreieck  $a_2 a_3 a_4$  sowohl allen Kegelschnitten des Büschels  $[\kappa_{11} \lambda_{22} \mu_{33} \nu_{44}]$ , als auch allen Kegelschnitten des Büschels  $[p_1 p_2 p_3 p_4]$  conjugirt. In jedem dieser beiden Büschel aber giebt es einen Kegelschnitt, der durch  $\beta, \gamma$  geht [421]. Diese beiden Kegelschnitte haben also zwei Puncte  $\beta, \gamma$  gemein und sind demselben Dreieck  $a_2 a_3 a_4$  conjugirt, folglich [110] müssen sie noch drei weitere Puncte mit einander gemein haben und daher identisch sein. (*Cremona. art. 149 f. Sam. Roberts. On the intersections etc. Quart. Journ. III. pag. 121.*)

423. Bezeichnet man, um den vorigen Satz vollständig zu haben, die Berührungspuncte der Tangenten

aus  $a_1$  mit  $p_1 p_2 p_3 p_4$   
 „  $a_2$  „  $q_1 q_2 q_3 q_4$   
 „  $a_3$  „  $r_1 r_2 r_3 r_4$   
 „  $a_4$  „  $s_1 s_2 s_3 s_4$ ,

und wendet für die Durchschnitte der Tangenten  $B$  und  $C$

die Bezeichnung von [393] an, so liegen folgende Punkte in Kegelschnitten:

$$\begin{array}{cccccccc} \beta & \gamma & \kappa_{11} & \lambda_{22} & \mu_{33} & \nu_{44} & p_1 & p_2 & p_3 & p_4 \\ \beta & \gamma & \kappa'_{12} & \lambda'_{21} & \mu'_{34} & \nu'_{43} & q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ \beta & \gamma & \kappa''_{13} & \lambda''_{24} & \mu''_{31} & \nu''_{42} & r_1 & r_2 & r_3 & r_4 \\ \beta & \gamma & \kappa'''_{14} & \lambda'''_{23} & \mu'''_{32} & \nu'''_{41} & s_1 & s_2 & s_3 & s_4. \end{array}$$

### §. 6.

424. Sind  $aa', bb', cc'$  drei beliebige Punctepaare, so ist der geometrische Ort der Punkte  $p$ , für welche die drei Strahlenpaare  $p(aa' bb' cc')$  conjugirte Paare einer Involution bilden, eine Curve 3. O., welche hindurchgeht durch die sechs gegebenen Punkte und ausserdem durch die drei Punctepaare, welche durch je zwei der gegebenen Paare bestimmt werden, d. h. [82] durch die Durchschnitte

$$\begin{array}{l} (b\ c, b'\ c') = f, \quad (c\ a, c'\ a') = g, \quad (a\ b, a'\ b') = h \\ (b\ c', b'\ c) = f', \quad (c'\ a, c\ a') = g', \quad (a'\ b', a'\ b) = h'. \end{array}$$

Beweis. Bezeichnet man die Strahlen  $pa, p a'$ , etc. kurz durch  $a, a'$ , etc., so ist die Bedingung der Involution nach [67] durch jede der folgenden vier Gleichungen ausgedrückt

$$\begin{array}{l} \sin(a\ b') \sin(b\ c') \sin(c\ a') = \sin(a\ c') \sin(b\ a') \sin(c\ b') \\ \sin(a\ b') \sin(b\ c) \sin(c'\ a') = \sin(a\ c) \sin(b\ a') \sin(c'\ b') \\ \sin(b\ c') \sin(c\ a) \sin(a'\ b') = \sin(b\ a) \sin(c\ b') \sin(a'\ c') \\ \sin(c\ a') \sin(a\ b) \sin(b'\ c') = \sin(c\ b) \sin(a\ c') \sin(b'\ a'). \end{array}$$

Diese Gleichungen kann man etwas umformen. Bezeichnen nämlich  $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \dots$  die Winkel, welche die Strahlen  $a, a', b, b', \dots$  mit einer beliebig angenommenen  $x$ -Axe einschliessen, so treten durch deren Einführung statt der Winkel  $(a\ b')$ ,  $(b\ c')$  ... die Differenzen  $\alpha - \beta', \beta - \gamma' \dots$  auf (oder vielmehr deren entgegengesetzte Werthe, was aber die Gleichungen un geändert lässt). Entwickelt man nun die Sinus dieser Differenzen und dividirt mit dem Product aller sechs Cosinus, so werden die Gleichungen von der Form

$$(\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta') (\operatorname{tg} \beta - \operatorname{tg} \gamma') \dots = \dots$$

Lässt man dann die Buchstaben  $\alpha, \beta, \dots$  statt der Winkel die Tangenten derselben bedeuten, so verwandeln sich die vorigen Gleichungen in folgende:

$$(\alpha - \beta') (\beta - \gamma') (\gamma - \alpha') = (\alpha - \gamma') (\beta - \alpha') (\gamma - \beta')$$

$$(\alpha - \beta') (\beta - \gamma) (\gamma' - \alpha') = (\alpha - \gamma) (\beta - \alpha') (\gamma' - \beta')$$

$$(\beta - \gamma') (\gamma - \alpha) (\alpha' - \beta') = (\beta - \alpha) (\gamma - \beta') (\alpha' - \gamma')$$

$$(\gamma - \alpha') (\alpha - \beta) (\beta' - \gamma') = (\gamma - \beta) (\alpha - \gamma') (\beta' - \alpha').$$

Nun kann man jede dieser Gleichungen als eine Curve darstellend auffassen, natürlich alle derselben Curve angehörend, da alle vier nur dasselbe besagen. Bezeichnet man nämlich mit  $x, y$  die rechtwinkligen Coordinaten der Punkte  $p, a, b, \dots$ , indem man diese Buchstaben als Indices zu  $x, y$  hinzufügt, so ist, da z. B.  $\alpha$  die Tangente des Winkels bedeutet, welche die Gerade  $pa$  mit der  $x$ -Axe bildet,

$$\alpha = \frac{y_p - y_a}{x_p - x_a}$$

und ebenso

$$\alpha - \beta' = \frac{y_p - y_a}{x_p - x_a} - \frac{y_p - y_{b'}}{x_p - x_{b'}}, \text{ etc.}$$

Daher bedeutet z. B.  $\alpha - \beta' = 0$  bei veränderlichen  $x_p, y_p$  die Gleichung der Geraden  $ab'$ , und ebenso bei den übrigen. In dieser Gestalt sind daher die vorigen Gleichungen verschiedene Formen der Gleichung des gesuchten geometrischen Ortes, und dieser ist somit eine Curve 3. O. Drückt man den linken Theil der Gleichung, welche eine Gerade  $ab'$  darstellt, kurz durch  $ab'$  aus, so kann man die vorigen Gleichungen auch schreiben:

$$ab' . bc' . ca' = ac' . ba' . cb' \dots \text{I.}$$

$$ab' . bc . c'a' = ac . ba' . c'b' \dots \text{II.}$$

$$bc' . ca . a'b' = ba . cb' . a'c' \dots \text{III.}$$

$$ca' . ab . b'c' = cb . ac' . b'a' \dots \text{IV.}$$

Die Gleichung I. zeigt, dass diese Curve hindurchgeht durch die Durchschnittspunkte

$$\begin{aligned} (ab', ac') &= a, (ab', ba') = h', (ab', cb') = b' \\ (bc', ac') &= c', (bc', ba') = b, (bc', cb') = f' \\ (ca', ac') &= g', (ca', ba') = a', (ca', cb') = c, \end{aligned}$$

sodann II., dass sie ausserdem geht durch

$$(b\ c, c'b') = f \quad (c'a', a\ c) = g;$$

endlich III., dass sie auch geht durch

$$(a'b', b\ a) = h.$$

(Cayley. Mémoire sur les courbes du troisième ordre. Liouville Journ. Bd. 9. pag. 287.)

**425.** Wenn eine Curve 3. O. durch irgend zehn von den zwölf Punkten  $a\ b\ c, a'\ b'\ c', f\ g\ h, f'\ g'\ h'$  [424] geht, so geht sie auch durch die beiden übrigen und hat die Eigenschaft, dass die von jedem ihrer Punkte  $p$  nach den Punctepaaren  $aa', bb', cc'$  gehenden Strahlenpaare in Involution sind. — Denn durch zehn Punkte kann niemals mehr als eine Curve 3. O. gehen; da nun der in [424] bestimmte geometrische Ort der Punkte  $p$  durch alle zwölf Punkte geht, so muss eine Curve 3. O., welche durch zehn dieser Punkte geht, dieser geometrische Ort sein.

**Zusatz.** Dasselbe gilt, allgemein zu reden, schon von einer Curve, welche durch neun jener Punkte geht, aber diese können dann nicht beliebig unter den zwölf gewählt werden, sondern nur so, dass sie nicht die Durchschnitte von zwei Mal drei Geraden bilden. (Cayley. l. c. [424] pag. 288.)

**426.** Wenn zwei Punctepaare so auf einer Curve 3. O. liegen, dass das durch sie nach [82] bestimmte dritte Punctepaar sich ebenfalls auf der Curve befindet, so sollen sie correspondirende Punctepaare heissen. (Cayley l. c. [424] pag. 288.)

**427.** Sind  $aa', bb'$  zwei correspondirende Punctepaare einer Curve 3. O., und ist das Paar  $cc'$  correspondirend mit  $aa'$ , so ist es auch correspondirend mit  $bb'$ , und die aus jedem Punkte der Curve nach den Punctepaaren  $aa', bb', cc'$  gehenden Strahlenpaare sind conjugirte Paare einer Involution.

**Beweis.** Die Paare  $aa', bb'$  bestimmen das Paar  $hh'$ ;  $aa', cc'$  bestimmen  $gg'$  [424]. Diese zehn Punkte liegen der Annahme nach auf der Curve; demnach [425] liegt auch das durch  $bb', cc'$  bestimmte Paar  $ff'$  auf der Curve, d. h.  $bb', cc'$  sind correspondirende Punctepaare, und die Curve 3. O. ist der geometrische Ort der Punkte  $p$ , von welchen die Strahlen

$p(aa', bb', cc')$  eine Involution bilden [425]. (Cayley l. c. [424] pag. 288.)

428. Zwei correspondirende Punctepaare  $aa', bb'$ , d. h. zwei so auf der Curve liegende Punctepaare, dass das durch sie bestimmte dritte Punctepaar  $cc'$  ebenfalls auf der Curve liegt, sind auch stets zwei Paare correspondirender Puncte, (d. h. jedes Paar hat einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct). — Aus [379], denn die drei Punctepaare  $aa', bb', cc'$  bilden dann die Ecken eines vollständigen Vierseits [82]. Das Umgekehrte gilt aber nicht. Vgl. [489, 491].

## Achter Abschnitt.

### Conjugirte Pole der Hesse'schen Curve.

#### §. 1.

429. In Beziehung auf einen Kegelschnitt hat jeder Punct  $x$  unendlich viele conjugirte Pole, nämlich alle auf der Polare von  $x$  liegenden Puncte [95]. In Beziehung auf einen Kegelschnittbüschel hat jeder Punct  $x$  im Allgemeinen einen einzigen bestimmten conjugirten Pol [111], nur wenn  $x$  der Durchschnitt der Verbindungsgeraden je zweier Basispuncte des Büschels ist, hat er unendlich viele Pole, nämlich alle Puncte der alsdann gemeinschaftlichen Polare von  $x$  in Bezug auf alle Kegelschnitte des Büschels [106]. In Beziehung auf ein Kegelschnittnetz aber, oder in Beziehung auf drei Kegelschnitte, die sich nicht in vier gemeinsamen Puncten schneiden, hat nicht jeder Punct einen conjugirten Pol, d. h. nicht für jeden Punct  $x$  schneiden sich die drei Polaren in Beziehung auf die drei Kegelschnitte in einem und demselben Puncte, sondern damit diese Eigenschaft stattfinde, muss  $x$  besondere Lagen haben.

430. Die Puncte  $x$ , welche in Beziehung auf drei beliebig gegebene Kegelschnitte  $u = 0$ ,  $v = 0$ ,  $w = 0$  einen conjugirten Pol haben, liegen sammt ihren conjugirten Polen auf einer Curve 3. O., welche zugleich der geometrische Ort dieser Puncte ist.

Beweis. Seien  $x_1, x_2, x_3$  die Variablen der Functionen  $u, v, w$ , und man bezeichne die partiellen Differentialquotienten  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  etc. durch  $u_i$ , etc. Dann haben die Polaren von  $x$  in Bezug auf die drei Kegelschnitte  $u = 0, v = 0, w = 0$  bei veränderlichen  $y_1 y_2 y_3$  nach [95] die Gleichungen

$$(1) \quad \begin{aligned} y_1 u_1 + y_2 u_2 + y_3 u_3 &= 0 \\ y_1 v_1 + y_2 v_2 + y_3 v_3 &= 0 \\ y_1 w_1 + y_2 w_2 + y_3 w_3 &= 0. \end{aligned}$$

Sollen diese drei Geraden sich in einem Punkte schneiden, so ist dazu erforderlich und hinreichend, dass

$$(2) \quad \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0$$

ist. Da die Functionen der  $x_i$ , welche die Elemente dieser Determinante bilden, vom ersten Grade sind, so ist der geometrische Ort der Punkte  $x$  eine Curve 3. O. — Der zu einem der Punkte  $x$  conjugirte Pol  $y$ , in welchem sich die drei Geraden (1) schneiden, liegt auf derselben Curve 3. O. Denn diese Gleichungen stellen sich kurz dar [1] durch

$$\Delta_y(u_x) = 0, \quad \Delta_y(v_x) = 0, \quad \Delta_y(w_x) = 0.$$

Da aber die Functionen  $u, v, w$  vom zweiten Grade sind, so lassen sich dieselben Gleichungen auch darstellen [5] durch

$$\Delta_x(u_y) = 0, \quad \Delta_x(v_y) = 0, \quad \Delta_x(w_y) = 0,$$

d. h. wenn die  $u, v, w$  als Functionen der  $y$  betrachtet, und die partiellen Differentialquotienten  $\frac{\partial u}{\partial y_i}$  etc. wieder mit  $u_i$  etc. bezeichnet werden, durch

$$\begin{aligned} x_1 u_1 + x_2 u_2 + x_3 u_3 &= 0 \\ x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 &= 0 \\ x_1 w_1 + x_2 w_2 + x_3 w_3 &= 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichungen aber bestehen dann und nur dann zusammen, wenn der Gleichung (2) auch von den  $y_i$  genügt wird; d. h. der Punkt  $y$  liegt auf dem geometrischen Orte der Punkte  $x$ . Zugleich bestätigen diese Gleichungen, dass wenn  $y$  conjugirter Pol zu  $x$  ist, so ist auch  $x$  conjugirter Pol

zu  $y$ . (*Hesse*. Ueber die Wendepuncte der Curve 3. O. *Crelle's Journ.* Bd. 28. pag. 105.)

**431.** Sind  $x$  und  $y$  conjugirte Pole in Beziehung auf drei Kegelschnitte  $u=0$ ,  $v=0$ ,  $w=0$ , so sind sie es auch in Beziehung auf alle Kegelschnitte des Netzes, welchem die gegebenen drei als Leitcurven angehören.

Beweis. Bedeuten  $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  willkürliche Parameter, so kann jeder Kegelschnitt des Netzes durch die Gleichung

$$\kappa u + \lambda v + \mu w = 0$$

dargestellt werden [195]. Die Polare des Punctes  $x$  in Beziehung auf denselben hat die Gleichung

$$\kappa \Delta_y(u_x) + \lambda \Delta_y(v_x) + \mu \Delta_y(w_x) = 0;$$

diese aber wird unabhängig von den Werthen von  $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  erfüllt, wenn der Punct  $y$  der Durchschnitt der Geraden  $\Delta_y(u_x)=0$ ,  $\Delta_y(v_x)=0$ ,  $\Delta_y(w_x)=0$  ist; d. h. die Polare von  $x$  in Bezug auf jeden Kegelschnitt des Netzes geht durch den zu  $x$  conjugirten Pol  $y$ . (*Hesse* l. c. [430] pag. 105.)

**432.** Die Curve 3. O., welche den geometrischen Ort der in Beziehung auf ein Kegelschnittnetz conjugirten Pole bildet, heisst die Hesse'sche Curve des Netzes (*Cremona* art. 132. b.) (Tripelcurve. *Schröter*. *Steiner's Vorlesungen* pag. 533.). Sind  $u=0$ ,  $v=0$ ,  $w=0$  drei Kegelschnitte des Netzes, so ist ihre Gleichung nach [430]

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = 0.$$

**433.** Aufgabe. Wenn drei Kegelschnitte  $u=0$ ,  $v=0$ ,  $w=0$  als Leitcurven eines Kegelschnittnetzes gegeben sind, die Hesse'sche Curve des Netzes zu construiren.

Auflösung. Man lege durch die vier Schnittpuncte  $a b c d$  von  $u$  und  $v$  einen beliebigen Kegelschnitt  $u'$  und bezeichne die Schnitte desselben mit  $w$  durch  $\alpha \beta \gamma \delta$ . Legt man durch diese vier Puncte ein Geradenpaar, so ist der Schnittpunct  $p$  desselben ein Punct der Hesse'schen Curve des Netzes. Man erhält dadurch sofort drei Puncte dieser Curve, und indem man den durch die Puncte  $a b c d$  gelegten Kegelschnitt  $u'$  variirt, beliebig viele. (*Hesse* l. c. [430] pag. 105.)



*Beweis.* Es ist zu zeigen, dass die Polaren des Punktes  $p$  in Beziehung auf alle Kegelschnitte  $\kappa u + \lambda v + \mu w = 0$  des Netzes sich in einem Punkte schneiden. Nun ist

$$u' = u + \lambda v = 0$$

(1) *beliebiger* durch die Schnitte  $a b c d$  von  $u$  und  $v$  gehen-  
ein *beliebiger* durch die Durchschnitte  $\alpha \beta \gamma \delta$   
der Kegelschnitt. Zieht man durch die Geradenpaar, so ist der Schnitt  $p$  desselben  
von  $u'$  und  $w$  ein Geradenpaar, so ist der Schnitt  $p$  desselben  
ein Punkt, dessen Polaren in Beziehung auf alle Kegelschnitte  
 $v'$ , die durch die Schnitte  $\alpha \beta \gamma \delta$  von  $u'$  und  $w$  gehen, in  
eine und dieselbe Gerade zusammenfallen [106]. Diese Kegel-  
schnitte lassen sich darstellen durch

$$v' = u' + \mu w = 0.$$

(2)

Nun kann man aber mit Hilfe der Gleichungen (1) und (2) der Gleichung jedes Kegelschnittes des Netzes folgende Formen geben:

$$\begin{aligned} 0 &= \kappa u + \lambda v + \mu w = (\kappa - 1) u + u + \lambda v + \mu w \\ &= (\kappa - 1) u + u' + \mu w \\ &= (\kappa - 1) u + v'; \end{aligned}$$

also geht jeder Kegelschnitt des Netzes durch die Schnitte des festen Kegelschnittes  $u$  mit dem variablen Kegelschnitt  $v'$  hindurch. Daher geht die Polare des Punktes  $p$  in Beziehung auf jeden Kegelschnitt des Netzes durch den Punkt  $q$ , in dem die Polaren von  $p$  in Bezug auf  $u$  und  $v'$  sich schneiden [111]. Allein die Polare von  $p$  in Bezug auf den veränderlichen Kegelschnitt  $v'$  ist eine unveränderliche Gerade, der Kegelschnitt  $u$  ist ebenfalls fest, also ist auch  $q$  ein fester Punkt.

**434.** Die sämtlichen conischen Polaren aller Punkte der Ebene in Bezug auf eine Curve 3. O.  $u = 0$  bilden ein Kegelschnittnetz [287]. Die Hesse'sche Curve dieses Netzes ist zugleich die Hesse'sche Curve  $H(u) = 0$  der Curve  $u = 0$ .

*Beweis.* Die Gleichungen

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

stellen drei conische Polaren dar, nämlich diejenigen, welche den Ecken des Fundamentaldreiecks angehören. Die Polaren eines Punktes  $x$  in Beziehung auf diese Kegelschnitte haben die Gleichungen

$$\begin{aligned}
 (1) \quad & y_1 u_{11} + y_2 u_{12} + y_3 u_{13} = 0 \\
 & y_1 u_{21} + y_2 u_{22} + y_3 u_{23} = 0 \\
 & y_1 u_{31} + y_2 u_{32} + y_3 u_{33} = 0.
 \end{aligned}$$

Die Gleichung der Hesse'schen Curve des Netzes, welche die Bedingung ausdrückt, dass diese drei Geraden sich in einem Punkte, nämlich dem zu  $x$  conjugirten Pole  $y$  schneiden, ist daher

$$H(u) = \begin{vmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

**Zusatz.** Die Gleichungen (1) enthalten zugleich die Bedingung, dass zwei Punkte  $x$  und  $y$  conjugirte Pole sind in Beziehung auf das von den conischen Polaren gebildete Netz. Sie bleiben nach [315] ungeändert, wenn man  $x$  mit  $y$  vertauscht.

**435. Aufgabe.** Zu einer gegebenen Curve 3. O. die Hesse'sche Curve zu construiren.

**Auflösung.** Man construire zu drei beliebig gewählten, nicht in einer Geraden liegenden Punkten die conischen Polaren [306] [307], betrachte diese als einem Kegelschnittnetze angehörig und construire nach [433] die Hesse'sche Curve dieses Netzes, so ist diese die verlangte Hesse'sche Curve [434].

## §. 2.

**436.** Die Hesse'sche Curve  $H(u) = 0$  einer Curve 3. O.  $u = 0$  hat die doppelte Eigenschaft: sie ist sowohl der geometrische Ort der Punkte, deren conische Polaren aus Geradenpaaren bestehen, als auch der geometrische Ort der Doppelpunkte dieser Geradenpaare. — Aus [191], da die erste Polare in Beziehung auf eine Curve 3. O. die conische Polare ist. (*Salmon* pag. 154.)

**437.** Sind  $x$  und  $y$  zwei conjugirte Pole in Beziehung auf das von den conischen Polaren gebildete Kegelschnittnetz, also zugleich [434] zwei Punkte der Hesse'schen Curve, so ist die conische Polare von  $x$  ein Geradenpaar, das sich in  $y$  schneidet, und die conische Polare von  $y$  ein Geradenpaar, das sich in  $x$  schneidet. Und umgekehrt: Ist die co-

nische Polare eines Punctes  $x$  ein Geradenpaar, das sich in  $y$  schneidet, so ist die conische Polare von  $y$  ein Geradenpaar, das sich in  $x$  schneidet, und  $x$  und  $y$  sind conjugirte Pole in Beziehung auf das von den conischen Polaren gebildete Kegelschnittnetz.

Beweis. Wenn  $x$  und  $y$  der Hesse'schen Curve angehören, so bestehen ihre conischen Polaren aus Geradenpaaren [268], und umgekehrt: besteht die conische Polare von  $x$  aus einem Geradenpaar, das sich in  $y$  schneidet, so liegt sowohl  $x$  als auch  $y$  auf der Hesse'schen Curve [436]. Nun ist die Gleichung der conischen Polare von  $x$  bei veränderlichen  $y_i$  [267]

(1)  $y_1^2 u_{11} + y_2^2 u_{22} + y_3^2 u_{33} + 2y_2 y_3 u_{23} + 2y_3 y_1 u_{31} + 2y_1 y_2 u_{12} = 0$ .  
Besteht diese aus zwei Geraden, so gelten nach [84] gleichzeitig die drei Gleichungen

$$\begin{aligned} & y_1 u_{11} + y_2 u_{12} + y_3 u_{13} = 0 \\ (2) \quad & y_1 u_{21} + y_2 u_{22} + y_3 u_{23} = 0 \\ & y_1 u_{31} + y_2 u_{32} + y_3 u_{33} = 0, \end{aligned}$$

und der Punct  $y$ , dessen Coordinaten diesen Gleichungen genügen, ist der Durchschnitt der beiden Geraden. Umgekehrt: gelten diese Gleichungen zusammen für einen Punct  $y$ , so besteht der Kegelschnitt (1) aus zwei Geraden, die sich in diesem Puncte  $y$  schneiden [84]. Die Gleichungen (2) sagen aber nach [434] aus, dass  $x$  und  $y$  conjugirte Pole in Bezug auf das von den conischen Polaren gebildete Kegelschnittnetz sind. Vertauscht man  $x$  mit  $y$ , so stellt die Gleichung (1) die conische Polare des Punctes  $y$  in veränderlichen  $x_i$  dar, die Gleichungen (2) aber bleiben ungeändert [434], daher ist die conische Polare von  $y$  ein Geradenpaar, das sich in  $x$  schneidet. (*Salmon* pag. 154.)

438. Nach diesem Satze gehören alle Puncte der Hesse'schen Curve  $H(u) = 0$  paarweise zusammen, in der Art, dass bei jedem Paare die aus einem Geradenpaar bestehende conische Polare des einen Punctes in dem anderen ihren Doppelpunct hat, und gleichzeitig bildet ein solches Punctepaar ein conjugirtes Polepaar in Beziehung auf jede conische Polare. Aus diesem Grunde sollen zwei solche zusammengehörige

Puncte der Hesse'schen Curve conjugirte Pole der Hesse'schen Curve genannt werden. (*Hesse*. Ueber Curven 3. O. etc. Crelle's Journ. Bd. 36. pag. 151.)

439. Hat die Curve 3. O.  $u = 0$  einen Doppelpunct  $d$ , so fallen in diesen Punct zwei conjugirte Pole der Hesse'schen Curve zusammen.

Beweis. Der Doppelpunct  $d$  liegt auf der Hesse'schen Curve [164], und die conische Polare von  $d$  ist das Tangentenpaar in diesem Puncte [181], also fällt der Schnittpunct desselben nach  $d$ , und dieser Schnittpunct ist der zu  $d$  conjugirte Pol [438].

440. Wenn die Hesse'sche Curve  $H(u) = 0$  einer Curve 3. O.  $u = 0$  keinen Doppelpunct hat, in welchem Falle die Curve  $u = 0$  nach [164] ebenfalls keinen Doppelpunct besitzt, so fallen in der Hesse'schen Curve keine zwei conjugirten Pole aufeinander.

Beweis. Wenn ein Punct  $x$  mit seinem conjugirten Pole zusammen fiel, so müsste die conische Polare von  $x$  durch diesen Punct hindurch gehen [438], und daher  $x$  auf der Curve  $u$  liegen [178]. Demnach müsste  $x$  einer der Durchschnitte der Curve  $u$  mit der Hesse'schen Curve  $H(u)$  sein, also, da  $u$  keinen Doppelpunct hat, ein Wendepunct der Curve  $u$  [157]. Aber die conische Polare eines Wendepunctes besteht aus der Wendetangente und der harmonischen Polare [280], und diese beiden Geraden könnten sich nach [363] nur dann in dem Wendepuncte treffen, wenn durch diesen noch eine zweite Wendetangente hindurchginge, was nicht möglich ist.

### §. 3.

441. Sind  $aa'$  und  $bb'$  zwei Paare conjugirter Pole der Hesse'schen Curve, so ist das durch sie bestimmte dritte Punctepaar  $cc'$  [82] ebenfalls ein Paar conjugirter Pole der Hesse'schen Curve. — Denn zwei conjugirte Pole der Hesse'schen Curve sind zugleich conjugirte Pole in Bezug auf jede conische Polare [438]; dann aber ist  $cc'$  ebenfalls ein Paar conjugirter Pole in Bezug auf jeden dieser Kegelschnitte [121].

442. Zwei Paare conjugirter Pole der Hesse'schen Curve

sind stets correspondirende Punctepaare [426]; denn das durch sie bestimmte dritte Punctepaar liegt [441] ebenfalls auf der Hesse'schen Curve.

**443.** Zwei conjugirte Pole  $aa'$  der Hesse'schen Curve sind stets auch correspondirende Puncte, d. h. sie haben einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct [378]. (*Cremona*. art. 133. a)

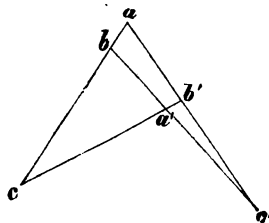
Beweis. Nimmt man noch ein zweites Paar conjugirter Pole  $bb'$  hinzu, so ist das dadurch bestimmte dritte Punctepaar  $cc'$  ebenfalls ein Paar conjugirter Pole [441]. Nun bilden diese sechs Puncte die Ecken eines vollständigen Vierecks und liegen auf der Hesse'schen Curve, also [379] schneiden sich die in den gegenüberliegenden Ecken  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  an die Hesse'sche Curve gezogenen Tangenten auf dieser Curve, und zwar in drei Puncten, die in gerader Linie liegen.

**444.** Vier mit einander correspondirende Puncte  $aa'bb'$  der Hesse'schen Curve, welche ein Quadrupel bilden [378], bilden stets zwei Paare conjugirter Pole. — Denn der conjugirte Pol eines dieser Puncte, z. B.  $a$ , muss sich unter den mit  $a$  correspondirenden Puncten befinden [443]; ist derselbe  $a'$ , so muss auch der zu  $b$  conjugirte Pol sich unter den mit einander correspondirenden Puncten befinden und kann kein anderer als  $b'$  sein, weil jedem Puncte ein und nur ein bestimmter conjugirter Pol zugehört, und niemals zwei Pole zusammenfallen können [440].

**445.** Sind  $abc$  drei in gerader Linie liegende Puncte der Hesse'schen Curve, so bilden ihre drei conjugirten Pole  $a'b'c'$  ein Dreieck, dessen Seiten  $b'c'$ ,  $c'a'$ ,  $a'b'$  resp. durch  $a$ ,  $b$ ,  $c$  hindurchgehen. (Fig. 34.)

Beweis. Sind  $aa'$ ,  $bb'$  conjugirte Polepaare, und  $abc$  in gerader Linie, so ist  $c$  ein Punct des durch die beiden ersten Paare bestimmten dritten Paares, und der conjugirte Pol  $c'$  von  $c$  der zweite Punct dieses Paares [441]. Mithin haben  $a'b'c'$  die behauptete Eigenschaft [82]. (*Hesse*. Ueber Curven 3. O. Crelle's Journ. Bd. 36. pag. 147.

Fig. 34.



*Cremona* art. 134.)

446. Zieht man aus einem Punkte  $c$  der Hesse'schen Curve (Fig. 34) Gerade nach zwei conjugirten Polen  $aa'$ , so sind die Punkte  $bb'$ , in welchen diese Geraden die Hesse'sche Curve noch treffen, ebenfalls conjugirte Pole, und die Geraden  $ab'$ ,  $a'b$  schneiden sich in dem zu  $c$  conjugirten Pole  $c'$ . — Aus [445], da nach der Construction  $abc$  in gerader Linie liegen.

447. Aufgabe. Wenn die Hesse'sche Curve und auf ihr ein Paar conjugirter Pole  $aa'$  gegeben ist, zu einem beliebigen Punkte  $c$  dieser Curve den conjugirten Pol  $c'$  zu construiren.

Auflösung. (Fig. 34.) Man schneide die Hesse'sche Curve mit  $ac$  in  $b$ , und mit  $a'c$  in  $b'$ , so ist der gesuchte Punkt  $c'$  der Schnitt der Geraden  $ab'$ ,  $ab'$ . — Aus [446]. (Hesse l. c. [445] pag. 147. Cremona art. 134.)

448. Sind  $aa'$  zwei conjugirte Pole der Hesse'schen Curve,  $\alpha$  ihr gemeinschaftlicher Tangentialpunkt, und  $\alpha'$  der dritte Schnittpunkt der Geraden  $aa'$  mit der Curve, so sind  $\alpha\alpha'$  conjugirte Pole. — (Fig. 34.) Denn fällt in [445]  $b$  mit  $a$  und daher auch  $b'$  mit  $a'$  zusammen, so werden die Geraden  $abc$ ,  $b'a'c$  Tangenten an der Hesse'schen Curve in  $a$  und  $a'$ . Demnach geht  $c$  in den Tangentialpunkt  $\alpha$  über, und der conjugirte Pol  $c'$  von  $c$  in den dritten Schnittpunkt  $\alpha'$  der Geraden  $aa'$  mit der Curve. (Cremona art. 133.)

449. Da jeder Punkt der Hesse'schen Curve nur einen ihm conjugirten Pol besitzt, so folgt auch umgekehrt: Ist  $\alpha$  der Tangentialpunkt von  $aa'$  und  $\alpha'$  der conjugirte Pol zu  $\alpha$ , so ist  $\alpha'$  der Schnittpunkt von  $aa'$  mit der Curve. Und: Ist  $\alpha'$  dieser Schnittpunkt, so ist sein conjugirter Pol  $\alpha$  der Tangentialpunkt von  $aa'$ .

450. Zieht man aus einem Punkte  $p$  der Hesse'schen Curve Strahlen nach den conjugirten Polepaaren dieser Curve, so sind diese Strahlen conjugirte Strahlenpaare einer Involution. (Cremona art. 134. a)

Beweis. Sind  $aa'$ ,  $bb'$  irgend zwei Paare conjugirter Pole, so sind sie zugleich correspondirende Punctepaare [442], und ist  $cc'$  ein drittes Polepaar, so sind sowohl  $aa'$ ,  $cc'$ , als

auch  $bb'$ ,  $cc'$  correspondirende Punctepaare. Mithin folgt die Behauptung aus [427].

**451.** Durch jeden Punct  $p$  der Hesse'schen Curve kann man zwei und nur zwei Gerade legen, von denen jede die Curve in zwei conjugirten Polen trifft, und zwar bilden diese Geraden die Doppelstrahlen der von  $p$  ausgehenden Involution. — Denn die von  $p$  nach den Polepaaren gehende Strahleninvolution [450] besitzt zwei Doppelstrahlen [64]. Jeder derselben aber muss zwei conjugirte Pole enthalten, da die letzteren niemals zusammenfallen [440].

**452.** Bilden  $aa'$   $bb'$  ein Punctquadrupel der Hesse'schen Curve mit dem Tangentialpunct  $p'$ , und sind  $aa'$ ,  $bb'$  conjugirte Polepaare [444], so treffen sich die Geraden  $aa'$  und  $bb'$  in einem Puncte  $p$  der Hesse'schen Curve, welcher der zu  $p'$  conjugirte Pol ist. Die Geraden  $pa'$ ,  $pb'$  sind die Doppelstrahlen der Involution, deren Scheitel in  $p$  liegt.

Beweis. Versteht man unter  $p$  zunächst den Durchschnitt der Geraden  $aa'$  mit der Curve, so ist  $p$  nach [448] der conjugirte Pol zu  $p'$ . Aber  $p'$  ist auch der Tangentialpunct von  $bb'$ , also trifft die Gerade  $bb'$  die Curve ebenfalls in  $p$  [449].

**453.** Schneiden sich die Verbindungslinien  $aa'$  und  $bb'$  zweier Polepaare der Hesse'schen Curve in einem Puncte  $p$  dieser Curve, so bilden die vier Puncte  $aa'bb'$  ein Quadrupel, dessen gemeinschaftlicher Tangentialpunct der zu  $p$  conjugirte Pol  $p'$  ist. — Denn nach [449] ist dann  $p'$  sowohl Tangentialpunct zu  $aa'$ , als auch zu  $bb'$ .

**454.** Sind  $abcdef$  sechs Puncte der Hesse'schen Curve, welche zugleich auf einem Kegelschnitte liegen, so liegen zwei von ihnen, z. B.  $ef$ , mit den conjugirten Polen  $a'b'c'd'$  der vier übrigen in einem zweiten Kegelschnitt.

Beweis. Da die Strahlen von irgend einem Puncte der Hesse'schen Curve, z. B. von  $e$ , nach den conjugirten Polen derselben in Involution sind, so ist [67]

$$e(a, b, c, d) \overline{\wedge} e(a', b', c', d')$$

und ebenso

$$f(a, b, c, d) \overline{\wedge} f(a', b', c', d').$$

Da aber  $ef$  mit  $abcd$  in einem Kegelschnitte liegen, so ist auch [86]

$$e(\acute{a} b c d) \overline{\wedge} f(a b c d)$$

und folglich

$$e(\acute{a}' b' c' d') \overline{\wedge} f(\acute{a}' b' c' d'),$$

mithin liegen auch  $ef\acute{a}' b' c' d'$  in einem Kegelschnitte [85].

**455.** Sind  $abcd$  vier beliebige Punkte der Hesse'schen Curve,  $\acute{a}' b' c' d'$  ihre conjugirten Pole, so haben diese zwei Gruppen von vier Punkten den nämlichen gegenüberliegenden Punkt.

**Beweis.** Legt man durch  $abcd$  einen beliebigen Kegelschnitt, welcher die Curve in  $ef$  trifft, so ist der gegenüberliegende Punkt  $m$  derjenige, in welchem die Gerade  $ef$  die Curve trifft [239]. Nun liegen aber  $\acute{a}' b' c' d' ef$  ebenfalls in einem Kegelschnitt [454], also ist  $m$  auch der gegenüberliegende Punkt zu  $\acute{a}' b' c' d'$ .

**456.** Liegen sechs Punkte  $abcdef$  der Hesse'schen Curve auf einem Kegelschnitte, so liegen ihre conjugirten Pole  $\acute{a}' b' c' d' e' f'$  auf einem zweiten Kegelschnitte. (Cremona art. 137. a)

**Beweis.** Die zwei Mal vier Punkte  $abcd$  und  $\acute{a}' b' c' d'$  haben denselben gegenüberliegenden Punkt  $m$  [455], es liegen also  $mef$  in einer Geraden. Zieht man nun  $me'$  und schneidet damit die Curve in  $f'$ , so liegen  $\acute{a}' b' c' d' e' f'$  in einem Kegelschnitt. Ist aber  $e'$  der conjugirte Pol zu  $e$ , so muss auch  $f'$  der conjugirte Pol zu  $f$  sein [446].

**457.** Sind  $abcd$  vier beliebige Punkte der Hesse'schen Curve,  $\acute{a}' b' c' d'$  ihre conjugirten Pole, so ist der neunte Durchschnittspunkt aller Curven 3. O., welche durch diese acht Punkte gehen, der Tangentialpunkt zu dem den Punkten  $abcd$  und  $\acute{a}' b' c' d'$  gemeinschaftlich gegenüberliegenden Punkte  $m$ . — Aus [263], da in diesem Falle wegen [455]  $m$  und  $\mu$  zusammenfallen.

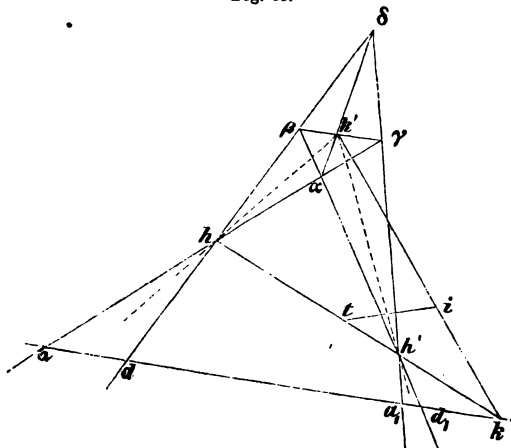


## §. 4.

458. (Fig. 35.) Ist  $hh'k$  eine Gerade, welche zwei conjugirte Pole  $hh'$  der Hesse'schen Curve  $H(u) = 0$  verbindet und diese Curve ausserdem in  $k$  schneidet; und sind ferner  $\alpha \beta \gamma \delta$  die Durchschnitte der conischen Polaren von  $h$  und  $h'$  bezüglich der Fundamentalcurve 3. O.  $u = 0$ , so zwar, dass [438]  $h'(\alpha \beta, \gamma \delta)$  die conische Polare von  $h$ , und  $h(\alpha \gamma, \beta \delta)$  die conische Polare von  $h'$  ist, so bilden die Geraden  $\alpha \delta, \beta \gamma$  die conische Polare von  $k$ , ihr Durchschnitt  $k'$  ist daher [438] der conjugirte Pol zu  $k$ , und dann zugleich wegen [449] der Tangentialpunct von  $h$  und  $h'$ .

Beweis. Die conischen Polaren aller Punkte einer Ge-

Fig. 35.



raden schneiden sich in denselben vier Punkten [284], also geht die conische Polare von  $k$  durch  $\alpha \beta \gamma \delta$ . Da aber  $k$  auf der Hesse'schen Curve liegt, so besteht seine conische Polare aus einem der drei durch diese vier Punkte gehenden Geraden-

paare. Zwei der letzteren, nämlich  $\alpha \beta, \gamma \delta$  und  $\alpha \gamma, \beta \delta$  sind die conischen Polaren von  $h$  und  $h'$ ; da nun zwei verschiedene Punkte auch stets verschiedene conische Polaren haben [267], [282], so muss die conische Polare von  $k$  das dritte Geradenpaar  $\alpha \delta, \beta \gamma$  sein. (Salmon pag. 155. Cremona art. 133.)

459. Die gerade Polare eines Punktes  $h$  der Hesse'schen Curve bezüglich der Fundamentalcurve ist eine Tangente an der Hesse'schen Curve, und zwar diejenige, welche diese in dem zu  $h$  conjugirten Pole  $h'$  berührt, und umgekehrt: Eine Tangente der Hesse'schen Curve in  $h'$  ist die gerade Polare

(bezüglich der Fundamentalcurve) des zu  $h'$  conjugirten Poles  $h$ .

**Beweis.** (Fig. 35.) Die gerade Polare eines Punctes  $h$  bezüglich der Fundamentalcurve ist zugleich die Polare von  $h$  bezüglich der conischen Polare von  $h$  [274]. Da nun hier diese conische Polare von den Geraden  $h'$  ( $\alpha \beta, \gamma \delta$ ) gebildet wird, so ist wegen des vollständigen Vierseits  $\alpha \beta \gamma \delta h h'$  jene gerade Polare die Gerade  $h'k'$  [95], und diese berührt die Hesse'sche Curve in  $h'$ , weil  $k'$  der Tangentialpunct von  $h'$  ist [458]. Ebenso ist die Tangente  $hk'$  an der Hesse'schen Curve in  $h$  die gerade Polare von  $h'$ . (*Salmon* pag. 155. *Cremona* art. 132. c)

**460.** Hieraus folgt: Beschreibt ein Punct  $h$  die Hesse'sche Curve, so hüllt dessen gerade Polare (bezüglich der Fundamentalcurve) die Hesse'sche Curve ein. (*Salmon* pag. 155. *Cremona* art. 132. c)

**461.** Die conische Polare (bez. d. Fund. Curve) irgend eines Punctes  $c$  schneidet die Hesse'sche Curve in sechs Puncten  $h$ . Die geraden Polaren (bez. d. Fund. Curve) dieser sechs Puncte  $h$  sind die von  $c$  an die Hesse'sche Curve gehenden Tangenten, und deren Berührungspuncte die conjugirten Pole jener sechs Puncte  $h$ .

**Beweis.** Da die conische Polare von  $c$  durch  $h$  geht, so geht die gerade Polare von  $h$  durch  $c$  [273]. Da aber  $h$  auf der Hesse'schen Curve liegt, so ist die gerade Polare von  $h$  Tangente an der Hesse'schen Curve in dem zu  $h$  conjugirten Pole [459]. (*Cremona* art. 132. c.)

**Anmerkung.** Dieser Satz lässt sich im Zusammenhang mit [270] auch so aussprechen: Die Berührungspuncte der von einem Puncte  $c$  an die Fund. Curve gehenden Tangenten sind die Durchschnitte derselben mit der conischen Polare von  $c$ ; die Berührungspuncte aber der von  $c$  an die Hesse'sche Curve gehenden Tangenten sind die conjugirten Pole der Durchschnitte der Hesse'schen Curve mit der nämlichen conischen Polare von  $c$ .

**462.** Ein Wendepunct  $w$  der Fund. Curve ist zugleich ein Punct der Hesse'schen Curve [339]. Der ihm als solchen conjugirte Pol  $w'$  ist der Durchschnitt der Wendetangente

und der harmonischen Polare von  $w$  (die erstere bezüglich der Fund. Curve). — Wegen [438], denn diese beiden Geraden bilden die conische Polare von  $w$ . [280] (*Cremona* art. 141.)

**463.** Die Wendetangente an der Fund. Curve in einem Wendepuncte  $w$  berührt die Hesse'sche Curve in dem zu  $w$  (als Punct der Hesse'schen Curve betrachtet) conjugirten Pole  $w'$ . — Aus [459], da die Wendetangente die gerade Polare von  $w$  ist [269]. (*Clebsch*. Ueber die Wendetangenten der Curven 3. O. *Crelle's Journ.* Bd. 58. pag. 232. — *Cremona*. art. 141.) — Folgt auch aus [341] in Verbindung mit [356], da  $w'$  auf der harmonischen Polare von  $w$  liegt [462].

Anmerkung. Eine Gerade, welche zwei conjugirte Pole  $h h'$  der Hesse'schen Curve verbindet, schneidet diese Curve im Allgemeinen noch in einem dritten Puncte  $k$ . Ist aber  $h$  ein Wendepunct, so fällt  $k$  mit  $h'$  zusammen.

**464.** Eine Curve 3. O. und ihre Hesse'sche Curve haben 27 gemeinschaftliche Tangenten, von denen neun die Wendetangenten der Fund. Curve sind; also ausser den letzteren noch 18.

Beweis. Da beide Curven von der sechsten Classe sind, so haben sie  $6 \cdot 6 = 36$  gemeinschaftliche Tangenten. [187. Note.] Unter diesen befinden sich nach [463] die Wendetangenten der Fund. Curve. Da aber jede von diesen als aus zwei zusammenfallenden Tangenten bestehend zu betrachten ist [187. Note], so sind ausser ihnen nur noch 18 gemeinschaftliche Tangenten vorhanden. (*Cremona*. art. 141. a)

## §. 5.

**465.** (Fig. 36.) Jede Gerade  $G$  hat bezüglich einer Curve 3. O. als Fund. Curve vier Pole  $a b c d$ , in welchen sich die conischen Polaren aller ihrer Puncte schneiden [285]. Sind nun  $g' h' k'$  die Puncte, in welchen die Gerade  $G$  die Hesse'sche Curve trifft, so sind die conischen Polaren von  $g', h', k'$  die drei Geradenpaare, welche durch  $a b c d$  hindurch gehen:  $(ac, bd)$ ;  $(ab, cd)$ ;  $(ad, bc)$  [268], und deren Durchschnitte, oder die Diagonalpuncte  $g, h, k$  des vollständigen Vierecks  $a b c d$  sind die conjugirten Pole zu resp.  $g', h', k'$  [438]. Die letzteren liegen der Reihe nach auf den Geraden  $hk, kg, gh$

[445]. Die Punkte  $g, h, k$  aber liegen als conjugirte Pole zu den drei Punkten  $g', h', k'$  der Hesse'schen Curve ebenfalls auf dieser Curve [438]. Hier-

Fig. 36.

aus folgt: Nimmt eine Gerade  $G$  nach und nach alle Lagen in der Ebene an, so beschreiben die Diagonalschwerpunkte  $g, h, k$  des von den vier Polen  $a, b, c, d$  der Geraden  $G$  (bezüglich einer Curve 3. O.  $u$ ) gebildeten vollständigen Vierecks die Hesse'sche Curve  $H(u)$ ; und die Seitenpaare dieses vollständigen Vierecks bilden die conischen Polaren (polaren Geradenpaare [268]) der Punkte der Hesse'schen Curve. (Cremona art. 133. d.)

Anmerkung. Da jeder Punkt als ein Pol einer Geraden  $G$  betrachtet werden kann, dem dann noch drei andere Pole beigeordnet sind, so tritt jeder Punkt der Ebene als eine Ecke eines solchen vollständigen Vierecks auf, und daher gehen durch jeden Punkt drei Gerade hindurch, von denen jede einem polaren Geradenpaar angehört.

466. (Fig. 36, 35.) Wird

die Gerade  $G$  eine Tangente an der Hesse'schen Curve, so dass zwei ihrer Durchschnitte mit derselben zusammenfallen,

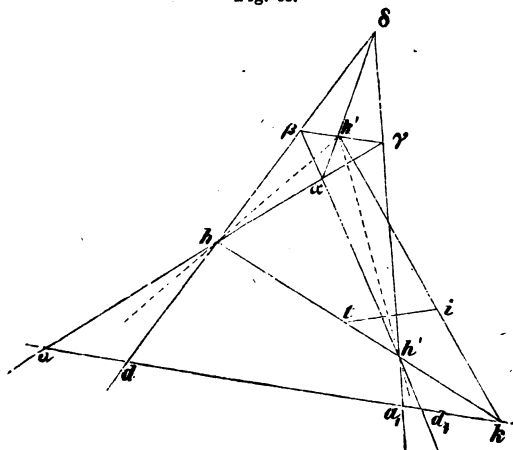
z. B.  $g'$  mit  $h'$ , so fallen auch die

Diagonalseiten  $hk$  und  $kg$ , auf

denen  $g'$  und  $h'$

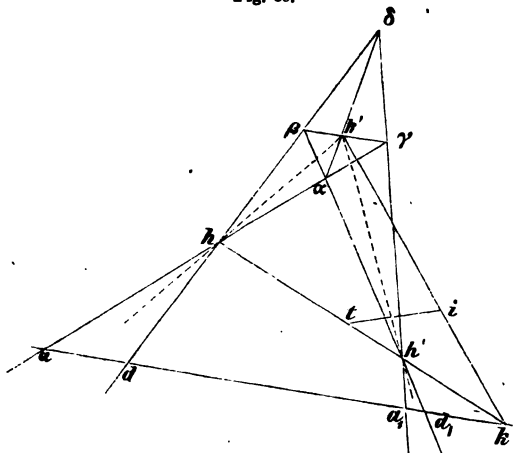
liegen, zusammen, und dies erfordert wiederum, dass sowohl

Fig. 35.



die Diagonalepunkte  $g, h$ , als auch die Ecken  $b, c$  des voll-

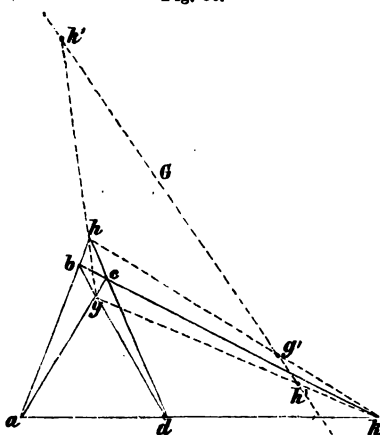
Fig. 35.



ständigen Vierecks  $abcd$  in denselben Punkt zusammenfallen, der als conjugirter Pol von  $h'$  mit  $h$  bezeichnet werde. Umgekehrt: Fallen zwei Pole  $b, c$  der Geraden  $G$  zusammen, so fallen auch  $g$  und  $h$  in den nämlichen Punkt, also

alle vier Punkte in einen  $h$ , und daher fallen auch  $g', h'$

Fig. 36.



in einen  $h'$  zusammen, in welchem dann  $G$  die Hesse'sche Curve berührt. Dadurch wird nun  $k'$  der Tangentialpunkt von  $h'$  (und auch von  $h$  [443]), ferner  $h(a, d)$  die conische Polare von  $h'$ , und  $k(hh', ad)$  die conische Polare von  $k'$ . Da endlich die conischen Polaren der Punkte von  $G$  alle durch  $b, c$  hindurchgehen, die Gerade  $bck$  sich nun aber in  $hh'k$  verwandelt hat, so haben die conischen Polaren aller Punkte von  $G$  die Gerade  $hh'$  zur gemeinschaftlichen Tangente in  $h$ . (Cremona art. 135.)

467. Aus dieser Betrachtung ergeben sich folgende Sätze: Wenn von den vier Polen einer Geraden  $G$  zwei in einen Punkt  $h$  zusammenfallen, so dass die conischen Polaren aller Punkte von  $G$  in  $h$  eine gemeinschaftliche Tangente haben, so liegt dieser Punkt auf der Hesse'schen Curve, die Gerade  $G$  aber berührt die Hesse'sche Curve in dem zu  $h$

conjugirten Pole  $h'$ , und die Gerade  $hh'$  ist die gemeinschaftliche Tangente jener conischen Polaren.

468. Ferner: Berührt eine Gerade  $G$  die Hesse'sche Curve in einem Punkte  $h'$ , so fallen zwei ihrer Pole bezüglich der Fundamentalcurve zusammen (bilden einen Doppelpol) in einen Punkt  $h$ , der auf der Hesse'schen Curve liegt und der zu  $h'$  conjugirte Pol ist.

469. Ferner: (Fig. 35.) Ist  $k'h'$  eine Tangente an der Hesse'schen Curve, und zwar  $h'$  Berührungspunct,  $k'$  Tangentialpunct, so besteht die conische Polare von  $h'$  aus den Geraden  $h(a, d)$ , welche den Doppelpol  $h$  der Geraden  $k'h'$  (bez. d. Fund. Curve) (d. i. den zu  $h'$  conjugirten Pol) mit den beiden einfachen Polen  $a, d$  derselben verbindet. Die conische Polare des Tangentialpunctes  $k'$  aber besteht aus den beiden Geraden  $hh'$  und  $ad$ , von denen die erstere den Berührungspunct  $h'$  mit seinem conjugirten Pole  $h$  verbindet, und die letztere die beiden einfachen Pole der Tangente  $k'h'$  verbindet. Dieses Geradenpaar schneidet sich in dem zu  $k'$  conjugirten Pole  $k$ , welcher zugleich der Punct ist, in welchem  $hh'$  die Hesse'sche Curve zum dritten Male trifft. (S. auch [449]) (*Cremona* art. 133. b.)

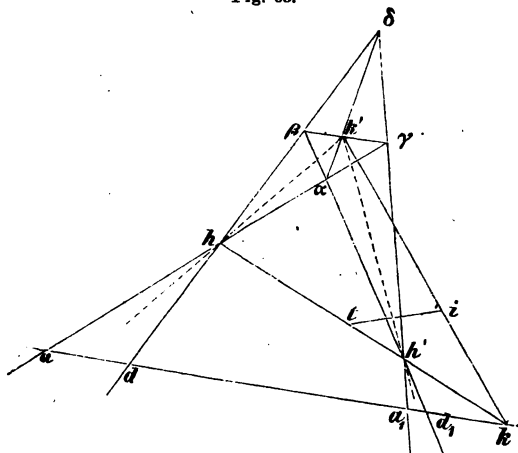
470. Hieraus folgt: Die Gerade, welche zwei conjugirte Pole  $hh'$  der Hesse'schen Curve verbindet, gehört mit zu den Geraden, welche die conischen Polaren der Puncte der Hesse'schen Curve zusammensetzen.

471. Wenn eine zwei conjugirte Pole  $hh'$  verbindende Gerade die Hesse'sche Curve in einem dieser Puncte, z. B. in  $h'$ , berührt, so ist der andere  $h$  ein Wendepunct, und  $hh'$  Wendetangente an der Fundamentalcurve. — Denn in diesem Falle fällt der dritte Durchschnitt  $k$  der Geraden  $hh'$  mit der Curve mit  $h'$  zusammen, und daher auch der Tangentialpunct  $k'$  von  $h'$  (nämlich der conjugirte Pol zu  $k$  [449]) auf  $h$ . Mit hin ist dann  $hh'$  Wendetangente an der Hesse'schen Curve und  $h$  Wendepunct für diese und daher auch für die Fundamentalcurve. Dann aber ist nach [463]  $hh'$  Wendetangente an der Fundamentalcurve.

472. Sind  $hh'$  zwei conjugirte Pole der Hesse'schen Curve,  $k'$  ihr gemeinschaftlicher Tangentialpunct, sind ausserdem

$h h a d$  die Pole der Tangente  $k' h'$ , und  $h' h' a_1 d_1$  die Pole der Tangente  $k' h$ , so liegen die vier Punkte  $a d a_1 d_1$  auf derselben Geraden, nämlich auf derjenigen, welche mit  $h h'$  zusammen die conische Polare von  $k'$  bildet. — Denn behält man in [469] den Tangentialpunkt  $k'$  bei, nimmt aber statt der Tangente  $k' h'$  die andere  $k' h$ , so muss die conische Polare von  $k'$  bestehen aus  $h h'$  und der Geraden, welche die einfachen Pole  $a_1 d_1$  der Tangente  $k' h$  verbindet; diese zweite Gerade aber war schon  $a d$ . Die Geraden  $h' (a_1, d_1)$  bilden natürlich die conische Polare von  $h$  [469].

Fig. 35.



473. Nach [465] gehen durch jeden Punkt  $h$  der Ebene drei Gerade hindurch, welche conischen Polaren angehören. Liegt aber  $h$  auf der Hesse'schen Curve, so gehören zwei dieser Geraden, nämlich  $h a$  und  $h d$  derselben conischen Polare an und zwar derjenigen des zu  $h$  conjugirten Pols  $h'$ , und die dritte geht durch diesen conjugirten Pol hindurch [466].

474. Die Tangente  $h k'$  in einem Punkte  $h$  der Hesse'schen Curve ist harmonisch zugeordnet zu der Geraden  $h h'$ , die nach dem zu  $h$  conjugirten Pole  $h'$  geht, in Beziehung auf das Geradenpaar  $h (a, d)$ , welches die conische Polare von  $h'$  bildet und nach den beiden einfachen Polen  $a, d$  der Tangente  $h' k'$  in  $h'$  an der Hesse'schen Curve geht. — Denn  $h k'$  ist die Polare von  $h'$  in Bezug auf die conische Polare von  $h'$  [459]. (Cremona art. 133.)

475. Ist  $h$  ein Wendepunct der Hesse'schen Curve (und daher auch der Fund. Curve [355]), geht also die Tangente  $hk'$  in die Wendetangente an der Hesse'schen Curve in  $h$  über, so fallen drei Pole dieser Geraden (bezüglich der Fund. Curve) in den zu  $h$  conjugirten Pol  $h'$ , und der vierte liegt auf der harmonischen Polare von  $h$ , welche nach [356] der Fund. Curve und der Hesse'schen Curve gemeinschaftlich ist.

Beweis. In diesem Falle fällt zuerst der Tangentialpunct  $k'$  mit  $h$  zusammen, sodann nach [463] auch  $k$  mit  $h'$ . Die conische Polare  $h'(a_1, d_1)$  des Wendepunctes  $h$  aber besteht aus der Wendetangente an der Fund. Curve und der harmonischen Polare [280]; und die erstere ist die Gerade  $hh'$  [463], also fällt von den beiden Geraden  $h'(a_1, d_1)$  die eine, etwa  $h'd_1$  mit  $hh'$  zusammen, und die andere  $h'a_1$  ist die harmonische Polare von  $h$ , demnach fallen die drei Punkte  $d_1, kh'$  in einen zusammen; d. h. es fällt in den Doppelpol  $h'$  der Geraden  $hk'$  (der Wendetangente an der Hesse'schen Curve) auch noch der einfache Pol  $d_1$ ; der vierte Pol  $a_1$  aber liegt auf der harmonischen Polare von  $h$ .

476. Alle conischen Polaren (bez. der Fund. Curve), welche durch den conjugirten Pol  $h'$  eines Wendepunctes  $h$  der Hesse'schen Curve gehen, haben in  $h'$  miteinander eine dreipunctige Berührung. — Denn diese conischen Polaren bilden einen Kegelschnittbüschel, dessen Basispunkte die vier Pole der geraden Polare von  $h'$  sind [288]. Die letztere aber ist die Wendetangente in  $h$  an der Hesse'schen Curve [459] und daher fallen drei Basispunkte des Büschels in  $h'$  zusammen [475].

477. Bilden zwei Gerade  $C, C'$  eine conische Polare eines Punctes  $k'$  der Hesse'schen Curve, sodass ihr Durchschnittspunct  $k$  auf der Hesse'schen Curve liegt und der zu  $k'$  conjugirte Pol ist [438], so trifft jede dieser Geraden die Hesse'sche Curve in zwei conjugirten Polen.

Beweis. Ist  $C$  irgend eine der beiden Geraden, und  $h$  ein von  $k$  verschiedener Durchschnittspunct derselben mit der Hesse'schen Curve, so gehen durch  $h$  drei Gerade hindurch, welche conischen Polaren angehören, von denen nach [473] eine durch den zu  $h$  conjugirten Pol  $h'$  geht, und die beiden



anderen die conische Polare von  $h'$  bilden. Eine dieser drei Geraden ist offenbar  $C$  selbst, aber diese gehört nicht zu dem in  $h$  sich treffenden polaren Geradenpaare, also muss sie diejenige sein, die durch den zu  $h$  conjugirten Pol geht.

Bemerkung. Hieraus folgt: Durchläuft ein Punct  $k$  die Hesse'sche Curve, so erzeugt das in  $k$  sich treffende polare Geradenpaar durch seine Durchschnitte mit der Hesse'schen Curve die conjugirten Pole der letzteren.

478. Ein polares Geradenpaar  $C, C'$  mit dem Durchschnitt  $k$  fällt zusammen mit den Doppelstrahlen der Involution, deren Scheitel in  $k$  liegt, und deren Strahlen nach den conjugirten Polen der Hesse'schen Curve gehen [450]. — Aus [451], denn die Geraden  $C, C'$  treffen jede die Hesse'sche Curve in zwei conjugirten Polen [477].

479. Liegen zwei conjugirte Polepaare  $hh'$  und  $ll'$  so, dass ihre Verbindungslinien sich in einem Puncte  $k$  der Curve schneiden, so bilden diese Geraden ein polares Geradenpaar. — Denn nach [451] gehen durch  $k$  nur zwei Gerade, welche die Hesse'sche Curve in conjugirten Polepaaren schneiden, und diese sind die Doppelstrahlen der von  $k$  ausgehenden Involution, mithin nach [478] auch ein polares Geradenpaar.

480. Die vier Puncte  $hh'll'$ , in denen ein polares Geradenpaar, mit dem Durchschnitte  $k$  die Hesse'sche Curve trifft, bilden ein Quadrupel, d. h. sie haben einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct  $K$ , der der conjugirte Pol zu  $k$  ist. — Aus [453], denn  $hh'$  und  $ll'$  sind nach [477] zwei Paare conjugirter Pole, deren Verbindungslinien sich in dem Puncte  $k$  schneiden, welcher auf der Hesse'schen Curve liegt.

481. Bilden zwei Paare conjugirter Pole  $hh'$  und  $ll'$  ein Punctquadrupel, so bilden die Geraden  $hh'$  und  $ll'$  eine conische Polare (ein polares Geradenpaar). — Aus [479], denn der Durchschnitt der Geraden  $hh'$  und  $ll'$  liegt auf der Hesse'schen Curve [452].

482. Wenn von den zwei Geraden eines polaren Geradenpaares mit dem auf der Hesse'schen Curve liegenden Durchschnittspuncte  $h'$ , die eine die Hesse'sche Curve in  $h'$  berührt, so ist sie die Wendetangente an der Fundamentalcurve in dem zu  $h'$  conjugirten Pole  $h$ , und die andere ist

die harmonische Polare des Wendepunctes  $h$ . — Denn da in  $h'$  nicht zwei conjugirte Pole zusammenfallen können [440], so schneidet die erstere Gerade die Hesse'sche Curve in dem zu  $h'$  conjugirten Pole  $h$  [477] und daher folgt die Behauptung aus [471].

### §. 6.

**483.** Jede Curve 3. O.  $v = 0$  kann als eine Hesse'sche Curve  $H(u) = 0$  angesehen werden, und zwar giebt es drei Curven 3. O.  $u = 0$ , für welche als Fundamentalcurven die gegebene Curve  $v = 0$  die Hesse'sche ist. (*Hesse*. Zur Theorie der Elimination. Crelle's Journ. Bd. 39. pag. 89.)

**Beweis 1.** Man kann die Curve  $v$  gegeben denken durch ein Punctquadrupel  $hh'll'$  und den zugehörigen Tangentialpunct  $k'$  [404]. Dann liegen die drei Durchschnitte der drei durch  $hh'll'$  gehenden Geradenpaare ebenfalls auf der Curve  $v$  [409]. Ist nun z. B.  $k$  der Durchschnitt der Geraden  $hh'$  und  $ll'$ , und betrachtet man diese als die conische Polare des Punctes  $k'$  in Beziehung auf eine Curve 3. O.  $u$ , so ist  $v$  die Hesse'sche Curve der letzteren und  $hh'$ ,  $ll'$ ,  $kk'$  conjugirte Polepaare auf derselben [481]. Da es aber drei Geradenpaare durch die vier Puncte des Quadrupels giebt, so kann jedes Paar als conische Polare des nämlichen Punctes  $k'$  in Beziehung auf eine Fund. Curve  $u$  betrachtet werden, und dann müssen diese drei Fundamentalcurven im Allgemeinen von einander verschieden sein, da einem Puncte in Beziehung auf eine Curve 3. O. nur eine einzige conische Polare zugehört [267].

**Beweis 2.** Nimmt man von den zwölf Geraden, welche durch die neun Wendepuncte einer Curve 3. O. gehen [353], drei, die alle neun enthalten, als Seiten des Fundamentaldreieckes  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$  an, so kann nach [354] die Gleichung der Curve in folgender Form geschrieben werden

$$(1) \quad u = \lambda' (x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6 \lambda x_1 x_2 x_3 = 0,$$

(indem an Stelle des Coefficienten  $k$  in der Gleichung (1) in [354] hier  $-2 \frac{\lambda}{\lambda'}$  gesetzt ist) und stellt bei veränderlichem

$\frac{\lambda}{\lambda'}$  alle Curven des syzygetischen Büschels [355] dar, welche durch die neun Wendepuncte hindurchgehen. Man erhält hieraus:

$$\begin{array}{ll} u_{11} = 6\lambda'x_1 & u_{23} = 6\lambda x_1 \\ u_{22} = 6\lambda'x_2 & u_{31} = 6\lambda x_2 \\ u_{33} = 6\lambda'x_3 & u_{12} = 6\lambda x_3 \end{array}$$

und dann die Gleichung der Hesse'schen Curve mit Weglassung des Coefficienten  $6^3$

$$H(u) = \begin{vmatrix} \lambda'x_1, \lambda x_3, \lambda x_2 \\ \lambda x_3, \lambda'x_2, \lambda x_1 \\ \lambda x_2, \lambda x_1, \lambda'x_3 \end{vmatrix} = 0,$$

oder entwickelt

$$H(u) = -\lambda^2\lambda'(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + (2\lambda^3 + \lambda'^3)x_1x_2x_3 = 0,$$

und wenn man

$$(2) \quad 2\lambda^3 + \lambda'^3 : -\lambda^2\lambda' = 6\mu : \mu'$$

setzt,

$$(3) \quad H(u) = \mu'(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) + 6\mu x_1x_2x_3 = 0.$$

Die Hesse'sche Curve erhält also eine Gleichung von derselben Gestalt wie die Fundamentalcurve, was sich erwarten liess, da die Hesse'sche Curve selbst eine der Curven des durch die Gleichung (1) dargestellten syzygetischen Büschels ist [355]. Demnach kann eine Curve 3. O. auch stets als eine Hesse'sche Curve (3) betrachtet werden, und wenn man nun diese, also  $\mu : \mu'$ , als gegeben ansieht, so findet man die ihr zugehörige Fundamentalcurve, wenn man  $\lambda : \lambda'$  aus der Gleichung (2), die sich schreiben lässt

$$(4) \quad 6\lambda^2\lambda'\mu + (2\lambda^3 + \lambda'^3)\mu' = 0$$

bestimmt. Diese liefert aber drei Werthe für das Verhältniss  $\lambda : \lambda'$ , und daher giebt es drei Fundamentalcurven, welchen eine gegebene Curve 3. O. als Hesse'sche Curve angehört.

Man kann mit Hülfe der Gleichung (4) entscheiden, ob und wann zwei der Fundamentalcurven zusammenfallen können, da dies dann und nur dann eintritt, wenn in jener cubischen Gleichung zwei Wurzeln einander gleich werden. Betrachtet man nämlich in dieser Gleichung  $\frac{\lambda'}{\lambda}$  als die Unbekannte, indem man sie in der Form

$$\left(\frac{\lambda'}{\lambda}\right)^3 + 6 \frac{\mu}{\mu'} \cdot \frac{\lambda'}{\lambda} + 2 = 0$$

schreibt, so kann man sie sehr leicht nach der Cardanischen Formel auflösen. Setzt man der Kürze wegen

$$p = \sqrt[3]{-1 + \sqrt{1 + \left(\frac{2\mu}{\mu'}\right)^3}}, \quad q = \sqrt[3]{-1 - \sqrt{1 + \left(\frac{2\mu}{\mu'}\right)^3}}$$

und unterwirft diese beiden Wurzelwerthe der Bedingung

$$(5) \quad pq = -\frac{2\mu}{\mu'},$$

bezeichnet ferner mit  $\alpha, \alpha^2$  die imaginären Cubikwurzeln der Einheit, so erhält man für  $\frac{\lambda'}{\lambda}$  die drei Werthe

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = p + q, = \alpha p + \alpha^2 q, = \alpha^2 p + \alpha q,$$

von welchen zwei einander gleich sind, wenn  $p=q$  ist. Dies tritt nun zuerst für  $\mu' = 0$  ein, indem  $p$  und  $q$  beide unendlich gross werden. In der That liefert dann die Gleichung (4)

$$\lambda^2 \lambda' = 0,$$

sodass  $\lambda' = 0$  die einfache und  $\lambda = 0$  die zweifache Wurzel ist. Der Hesse'schen Curve  $x_1 x_2 x_3 = 0$  gehört also  $x_1 x_2 x_3 = 0$  einmal und  $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$  zweimal als Fundamentalcurve an. Ausserdem wird  $p = q$ , wenn

$$\left(\frac{2\mu}{\mu'}\right)^3 = -1$$

also

$$-\frac{2\mu}{\mu'} = 1, = \alpha, = \alpha^2$$

ist. Dieses aber sind drei Werthe, für welche der linke Theil der Gleichung (3) in drei lineare Factoren zerfällt, (S. die Formeln (4) in [354]), für welche also die Hesse'sche Curve aus drei Geraden besteht. Ist dann  $-\frac{2\mu}{\mu'} = 1$ , so wird  $p = q = -1$  und daher, da  $\alpha + \alpha^2 = -1$  ist,

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -2, = +1, = +1$$

oder

$$-\frac{2\lambda}{\lambda'} = 1, = -2, = -2.$$

Für  $-\frac{2\mu}{\mu'} = \alpha$  ist ferner wegen (5)  $p = q = -\alpha^2$  und

damit

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -2\alpha^2, = +\alpha^2, = +\alpha^2; \quad -\frac{2\lambda}{\lambda'} = \alpha, = -2\alpha, = -2\alpha.$$

Endlich für  $-\frac{2\mu}{\mu'} = \alpha^2$  hat man  $p = q = -\alpha$  und

$$\frac{\lambda'}{\lambda} = -2\alpha, = +\alpha, = +\alpha, \quad -\frac{2\lambda}{\lambda'} = \alpha^2, = -2\alpha^2, = -2\alpha^2.$$

In allen diesen Fällen besteht daher die von der einfachen Wurzel herrührende Fundamental-Curve aus den nämlichen drei Geraden, wie die Hesse'sche Curve (vgl. [340]); und ausserdem giebt es jedesmal noch eine zweite, von der zweifachen Wurzel herrührende Fundamentalcurve, welche ebenfalls die drei Geraden zur Hesse'schen Curve hat. Die Gleichungen dieser Curven sind folgende:

Hesse'sche Curve.

$$x_1 x_2 x_3 = 0$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1 x_2 x_3 = 0$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\alpha x_1 x_2 x_3 = 0$$

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\alpha^2 x_1 x_2 x_3 = 0$$

Fundamentalcurven:

einfache Wurzel.	zweifache Wurzel.
$x_1 x_2 x_3 = 0$	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$
$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1 x_2 x_3 = 0$	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6x_1 x_2 x_3 = 0$
$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\alpha x_1 x_2 x_3 = 0$	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\alpha x_1 x_2 x_3 = 0$
$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3\alpha^2 x_1 x_2 x_3 = 0$	$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6\alpha^2 x_1 x_2 x_3 = 0$

Die Vergleichung mit [354] zeigt, dass diese vier aus je drei Geraden bestehenden Hesse'schen Curven die vier Gruppen von je drei Geraden sind, auf welchen die Wendepuncte vertheilt liegen.

Es ergibt sich daher, dass im Allgemeinen zu einer Hesse'schen Curve stets drei verschiedene Fundamentalcurven gehören; wenn aber die Hesse'sche Curve aus drei Geraden besteht, so fallen zwei der Fundamentalcurven zusammen, und die dritte ist mit der Hesse'schen Curve identisch.

Beweis 3. S. [622].

484. Aus [483. Bew. 1] folgt: Die drei Geradenpaare, welche durch die Punkte eines Quadrupels einer Curve 3. O.  $v = 0$  gehen, sind die conischen Polaren des Tangential-

punctes in Beziehung auf die drei Curven  $u = 0$ , welche als Fundamentalcurven zu  $v$  als einer Hesse'schen Curve gehören. (*Cremona* art. 147. a.)

485. Zwei Punkte einer Curve 3. O.  $u = 0$ , welche, sobald man diese Curve als eine Hesse'sche betrachtet, auf der letzteren conjugirte Pole sind, sollen conjugirte Pole der Curve  $u$  genannt werden. Sind  $a_1 a_2 a_3 a_4$  die vier Punkte eines Quadrupels, so lassen sich dieselben auf dreifache Weise zu conjugirten Polepaaren anordnen, nämlich

$$a_1 a_2, a_3 a_4; a_1 a_3, a_2 a_4; a_1 a_4, a_2 a_3;$$

denn da die gegebene Curve auf dreifache Weise als Hesse'sche Curve betrachtet werden kann, nämlich als zu drei verschiedenen Fund. Curven gehörig, so gehört demselben Punkte  $a_1$ , je nachdem man eine dieser drei Fund. Curven wählt,  $a_2$  oder  $a_3$  oder  $a_4$  als conjugirter Pol zu, und die beiden übrigen Punkte sind dann ebenfalls conjugirte Pole [444]. Demnach giebt es auf einer Curve 3. O. drei verschiedene Systeme conjugirter Polepaare, und die drei Punkte  $a_2 a_3 a_4$ , welche in diesen drei Systemen zu  $a_1$  als conjugirte Pole gehören, bilden mit  $a_1$  ein Punctquadrupel. Alle von den conjugirten Polen einer Hesse'schen Curve geltenden Sätze gelten daher ohne Weiteres auch von den conjugirten Polen desselben Systemes einer beliebigen Curve 3. O., so bald diese als Hesse'sche Curve betrachtet wird. Ausserdem ergibt sich hieraus, dass zwei Punkte einer Curve 3. O., die denselben Tangentialpunct haben (correspondirende Punkte sind), auch stets als conjugirte Pole in einem der drei Systeme betrachtet werden können.

486. Aufgabe. Eine Curve 3. O. zu construiren, wenn dieselbe durch ein Punctquadrupel und den zugehörigen Tangentialpunct gegeben ist [404].

Auflösung. Man betrachte die zu construierende Curve als eine Hesse'sche Curve und ordne die Punkte des Quadrupels in beliebiger Weise paarweise einander als conjugirte Polepaare zu. Sind dann  $aa'$ ,  $bb'$  diese beiden Paare und  $p$  der Tangentialpunct, so ist der Durchschnittspunct  $p' = (aa', bb')$  der zu  $p$  conjugirte Pol [452]. Wenn man nun immer zu je zwei conjugirten Polepaaren das dritte Punctepaar nach [82]

bestimmt, erhält man neue Punctepaare der gesuchten Curve, welche dann auch stets conjugirte Polepaare sind [441]. Indem man also von den gegebenen Puncten  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $p$  ausgeht, bestimmt man zuerst  $p' = (aa', bb')$ , sodann liefern je zwei Paare ein neues Paar in folgender Art:

$$\begin{array}{ll} aa', bb' \text{ liefern } cc' & dd', bb' \text{ liefern } ff' \\ cc', pp' \text{ „ } dd' & ee', bb' \text{ „ } hh' \\ dd', aa' \text{ „ } ee' & ee', cc' \text{ „ } ii' \end{array}$$

u. s. f.

**Bemerkung.** Da bei dieser Construction auch Gerade zu ziehen sind, welche einen Curvenpunct mit den Puncten eines Quadrupels verbinden, so erhält man nach [382] auch immer neue Punctquadrupel, deren Tangentialpuncte nach [487] oder [412] ebenfalls gefunden werden können.

**487. Aufgabe.** Wenn eine Curve 3. O. durch ein Punctquadrupel  $aa'bb'$  und den zugehörigen Tangentialpunct  $p$  gegeben ist, an dem Durchschnitte eines der drei durch das Quadrupel gehenden Geradenpaare z. B. an  $p' = (aa', bb')$  die Tangente zu construiren.

**Auflösung.** Die gesuchte Tangente ist der zu  $p'p$  in Beziehung auf  $p' (a', b')$  zugeordnete harmonische Strahl. — Denn sieht man die gegebene Curve in der Art als Hesse'sche Curve an, dass  $p' (a', b')$  die conische Polare von  $p$  in Beziehung auf eine der drei Fundamentalcurven ist, so sind dies zugleich die Doppelstrahlen der von  $p'$  nach den conjugirten Polen gehenden Involution [478]. Da nun  $p$  der conjugirte Pol zu  $p'$  ist, so sind  $p' (p, p')$  conjugirte Strahlen der Involution und daher einander harmonisch zugeordnet in Beziehung auf  $p' (a' b')$  [67, 40]. Aber der Strahl  $p'p$  ist die Tangente in  $p'$ . (Folgt auch aus [474].)

**Zusatz.** Construiert man auf diese Weise die Tangenten an den Durchschnitten von zwei durch das Quadrupel gehenden Geradenpaaren, so liefert der Schnittpunct dieser beiden Tangenten zugleich den zu  $p$  zugehörigen Tangentialpunct  $q$ . (Vgl. [412].)

**488. Aufgabe.** Wenn eine durch ein Punctquadrupel und den zugehörigen Tangentialpunct gegebene Curve nach

[486] durch ihre conjugirten Polepaare construirt ist, in einem beliebigen Punkte  $m$  derselben die Tangente zu construiren.

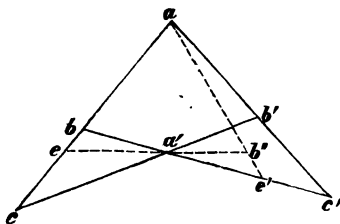
Auflösung. Ist  $m$  einer der construirten Punkte, so hat die Construction [486] auch den zu  $m$  conjugirten Pol  $m'$  ergeben, im entgegengesetzten Falle findet man  $m'$  nach [447]. Zieht man nun aus  $m$  Strahlen nach irgend zwei Paaren conjugirter Pole z. B. nach  $aa'$  und  $bb'$ , so ist die gesuchte Tangente der zu  $mm'$  conjugirte Strahl in der durch  $m(aa'bb')$  bestimmten Involution [450] und kann nach [117] construirt werden.

### §. 7.

489. Zwei conjugirte Polepaare desselben Systemes sind nach [442] stets correspondirende Punctepaare. Es gilt aber auch das Umgekehrte: Wenn zwei Paare correspondirender Punkte  $aa'$ ,  $bb'$  (d. h. solche Punctepaare, von denen jedes einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct besitzt) zugleich correspondirende Punctepaare sind (d. h. so liegen, dass das durch sie bestimmte dritte Punctepaar  $cc'$  ebenfalls sich auf der Curve befindet) so sind sie conjugirte Polepaare in demselben System. (Cremona art. 146. b.)

Beweis. Die drei Paare  $aa'$ ,  $bb'$ ,  $cc'$  bilden die Ecken eines vollständigen Vierseits [82]. Wäre nun (Fig. 37) nicht  $b'$ , sondern  $b''$  der zu  $b$  conjugirte Pol in demselben Systeme, wie  $aa'$ , und ist dann  $ee'$  das durch  $aa'$  und  $bb''$  bestimmte dritte Punctepaar, so würden  $ee'$  auf der Curve liegen und mit  $aa'$ ,  $bb''$  die Ecken eines vollständigen Vierseits bilden [441]. Von jedem der Paare  $cc'$  und  $ee'$  liegt aber ein Punct mit  $ab$  in gerader Linie, etwa  $c$  und  $e$ . Man hätte dann also vier Punkte  $a b c e$ , welche auf der Curve und zugleich in einer Geraden liegen, was nicht möglich ist.

Fig. 37.



490. Hieraus folgt: Liegen die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits auf einer Curve 3. O., so sind die drei Paare gegenüberliegender Ecken conjugirte Polepaare in dem-



selben System, und deren drei Tangentialpunkte liegen nach [379] in einer Geraden. — Denn je zwei gegenüberliegende Ecken sind correspondirende Punkte [379] und je zwei Paare gegenüberliegender Ecken correspondirende Punktepaare. (*Cremona* art. 146. b.)

491. Sind  $aa'$  conjugirte Pole in einem System mit dem Tangentialpunkt  $\alpha$ ,  $bb'$  conjugirte Pole in einem zweiten Systeme mit dem Tangentialpunkt  $\beta$ , und schneidet man die Curve mit  $ab$ ,  $a'b'$ ,  $\alpha\beta$  resp. in  $c$ ,  $c'$ ,  $\gamma$ , so sind  $cc'$  conjugirte Pole in dem dritten Systeme, und  $\gamma$  ihr Tangentialpunkt.

Beweis (Fig. 38). Zunächst folgt aus [230], da sowohl  $abc$ , als auch  $a'b'c'$  in gerader Linie liegen, dass  $\gamma$  der Tangentialpunkt sowohl zu  $c$  als auch zu  $c'$  ist. Demnach sind  $cc'$  correspondirende Punkte und können also auch als conjugirte Pole in einem der drei Systeme betrachtet werden [485]. Gehörten nun  $cc'$  und  $aa'$  zu demselben Systeme, so müsste nach [441] der Durchschnitt  $(ac, a'c') = e$  auf der Curve und zugleich auf der Geraden  $ac$  liegen, auf welcher sich schon der Punkt  $b$  befindet, dann aber hätte man vier Curvenpunkte in gerader Linie. Aus demselben Grunde können auch  $cc'$  und  $bb'$  nicht demselben Systeme angehören. — Dies gilt nur, wenn  $aa'$  und  $bb'$  selbst verschiedenen Systemen angehören, denn sonst würden  $ab$  und  $a'b'$  die Curve in demselben Punkte treffen [441], und daher  $c$  mit  $c'$  zusammenfallen. (*Hesse*. Ueber Curven 3. O. etc. *Crelle's Journ.* Bd. 36. pag. 151. *Cremona* art. 146. c.)

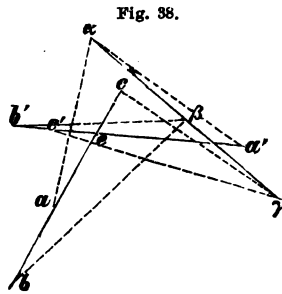


Fig. 38.

492. Man kann mit Hülfe des vorigen Satzes, welcher sich auf conjugirte Polepaare verschiedener Systeme, und des Satzes [445], der sich auf conjugirte Pole desselben Systemes bezieht, die 16 Geraden von [385] wiederfinden, welche die Berührungspunkte der aus drei in gerader Linie liegenden Curvenpunkten an die Curve gelegten Tangenten zu je dreien verbinden. Denn

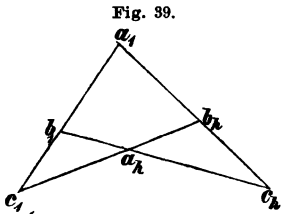


Fig. 39.

bezeichnet man wie in [385] mit  $a_1 b_1 c_1$  irgend drei dieser Berührungspunkte, die in gerader Linie liegen, und mit  $a_h b_h c_h$  ihre demselben Systeme angehörigen conjugirten Pole, so dass man die drei Systeme erschöpft, wenn man dem Index  $h$  nach und nach die Werthe 2, 3, 4 giebt, so liefert zuerst [445] die Geraden

$$a_1 b_h c_h \quad b_1 a_h c_h \quad c_1 a_h b_h$$

welche neun Gerade darstellen, wenn  $h$  gleich 2, 3, 4 gesetzt wird. (Fig. 39.) Bezeichnet man ferner, wenn dem Index  $h$  drei verschiedene Werthe gegeben werden, diese mit  $h, i, k$ , so zieht in Folge von [491] die Existenz der Geraden  $a_1 b_1 c_1$  die folgende

$$a_h b_i c_k$$

nach sich, welche sechs Gerade darstellt, wenn für  $h, i, k$  die allemal von einander verschiedenen Indices 2, 3, 4 in allen möglichen Anordnungen gesetzt werden. (Hesse l. c. [491] pag. 153. Cremona art. 149.)

**493.** Sind  $a b c d$  vier beliebige Punkte einer Curve 3. O.,  $a' b' c' d', a'' b'' c'' d''$  die ihnen in den drei Systemen conjugirten Pole, sodass  $a a' a'' a'''$ ,  $b b' b'' b'''$ ,  $c c' c'' c'''$ ,  $d d' d'' d'''$  vier Quadrupel bilden, und legt man durch eine der ersteren vier Gruppen, z. B.  $a b c d$ , einen Kegelschnitt, welcher die Curve in  $e, f$  schneidet, so liegen diese Punkte auch mit jeder der drei anderen Gruppen  $a' b' c' d', a'' b'' c'' d'', a''' b''' c''' d'''$  in Kegelschnitten. — Aus [454], wenn man diesen Satz auf die conjugirten Pole in allen drei Systemen anwendet.

**494.** Die vier Punktgruppen  $abcd, a'b'c'd', a''b''c''d'', a'''b'''c'''d'''$  haben den nämlichen gegenüberliegenden Punkt. — Aus [455].

**495.** Alle Curven 3. O., welche durch zwei dieser vier Punktgruppen hindurch gehen, gehen auch durch den Punkt, welcher der Tangentialpunkt ist zu dem den vier Gruppen gemeinschaftlich gegenüberliegenden Punkte. — Aus [457].

## Neunter Abschnitt.

## Die Cayley'sche Curve.

## §. 1.

**496.** Die Curve, welche die sämtlichen polaren Geradenpaare in Bezug auf eine Curve 3. O.  $u$  einhüllt, heisst die Cayley'sche Curve für die Fundamentalcurve  $u$  (*Cremona* art. 133. b.)\*). Betrachtet man eine Curve 3. O. als eine Hesse'sche Curve, so dass ihr drei andere Curven 3. O. als Fundamentalcurven zugehören [483], so gehört zu jeder der letzteren eine andere Cayley'sche Curve.

**497.** Die drei Geradenpaare, welche die Punkte eines Quadrupels bei einer Curve 3. O.  $u$  verbinden, sind Tangenten an den drei Cayley'schen Curven, welche zu  $u$  gehören, wenn diese als Hesse'sche Curve aufgefasst wird. — Denn diese Geradenpaare sind die conischen Polaren des Tangentialpunctes in Beziehung auf die drei Fundamentalcurven [484]. (*Hesse*. Ueber Curven 3. O. etc. *Crelle's Journ.* Bd. 38. pag. 252. *Cremona*. 148. a.)

**498.** Lässt man eine Gerade  $G$  alle möglichen Lagen in der Ebene annehmen und bestimmt jedesmal ihre vier Pole  $a b c d$  bezüglich einer Curve 3. O., so beschreiben die Diagonelpuncte des vollständigen Vierecks  $a b c d$  die Hesse'sche Curve [465], und die Seiten dieses Vierecks hüllen die Cayley'sche Curve ein. — Denn diese Seiten bilden die sämtlichen conischen Polaren, welche aus Geradenpaaren bestehen [465]. (*Cremona* art. 133. d.)

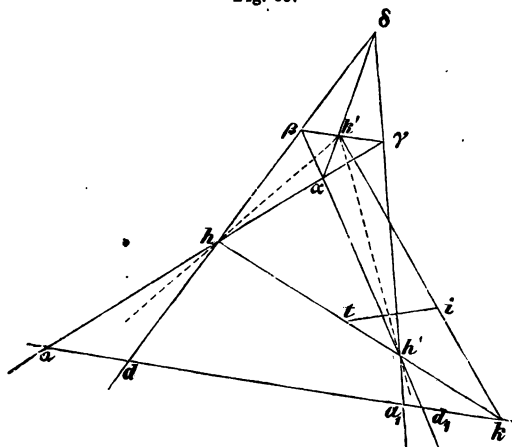
---

\*) Nachdem *Hesse* (Ueber Curven dritter Ordnung und Curven dritter Classe. *Crelle's Journ.* Bd. 38. pag. 241) diese Curve zuerst aufgestellt und in Verbindung mit der Hesse'schen Curve betrachtet hatte, wurde sie später von *Cayley* (A memoir on curves of the third order. *Phil. Trans.* vol. 147. pag. 415) noch ausführlicher behandelt. *Cayley* selbst hatte diese und eine andere Curve von minderer Wichtigkeit mit den Namen „the Pippian“ und „the Quippian“ belegt, aus Anlass des Umstandes, dass er sie ursprünglich mit den Buchstaben  $P$  und  $Q$  bezeichnet hatte.

**499.** Die Cayley'sche Curve ist von der dritten Classe, d. h. aus jedem Puncte der Ebene gehen drei Tangenten an dieselbe [186]. — Denn durch jeden Punct der Ebene gehen drei Geraden, welche zu polaren Geradenpaaren gehören [465]. Für einen auf der Cayley'schen Curve liegenden Punct fallen zwei von diesen Tangenten zusammen. (*Hesse* l. c. [497] pag. 252. *Cayley*. A memoir on curves of the third order. Phil. Trans. vol. 147. pag. 417. *Cremona* art. 133. b.)

**500.** Die drei Tangenten, welche von einem Puncte  $h$  der Hesse'schen Curve (Fig. 35) an die Cayley'sche Curve

Fig. 35.



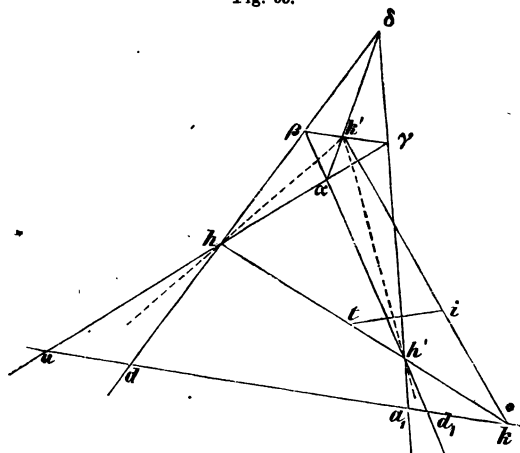
gelegt werden können, sind: das polare Geradenpaar, das sich in  $h$  schneidet, und die durch den zu  $h$  conjugirten Pol  $h'$  gehende Gerade. Die beiden ersteren bilden die conische Polare von  $h'$  und gehen zugleich durch die Puncte  $a, d$ , die mit  $h$  als Doppelpol zusammen die vier Pole der Geraden  $h'k'$  bilden, welche die Hesse'sche Curve in  $h'$  berührt [473]. (*Cayley* l. c. [499] pag. 417. *Cremona* art. 133. c.)

**501.** Eine Gerade, welche zwei conjugirte Pole der Hesse'schen Curve verbindet, ist eine Tangente der Cayley'schen Curve. — Denn eine solche Gerade gehört einem polaren Geradenpaare an [470]. Und umgekehrt: Eine Tangente an der Cayley'schen Curve trifft die Hesse'sche Curve in zwei conjugirten Polen und im Allgemeinen ausserdem noch in einem dritten Puncte. — Aus [477], da eine Tangente an

der Cayley'schen Curve einem polaren Geradenpaare angehört. (Cayley l. c. [499] pag. 417. 423. Cremona art. 135. c.)

502. Unter den drei von einem Punkte  $h$  der Hesse'schen Curve (Fig. 35) an die Cayley'sche Curve gehenden Tangenten ist diejenige, welche durch den zu  $h$  conjugirten

Fig. 35.

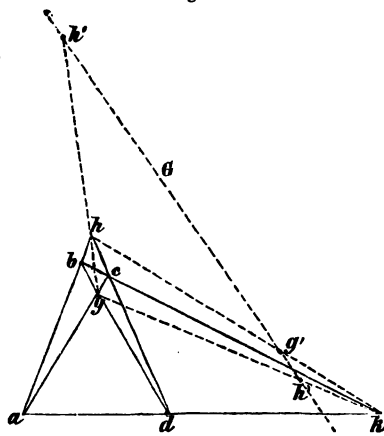


Pol  $h'$  geht, in Beziehung auf die beiden anderen Tangenten  $h(a, d)$  harmonisch zugeordnet zu der Tangente  $hk'$  an der Hesse'schen Curve in  $h$ . — Aus [474] mit Rücksicht auf [500]. (Cayley l. c. [499] pag. 417.)

503. (Fig. 35.)

Ist  $h$  ein Punkt der Hesse'schen Curve, und sind  $a, d$  die Punkte, welche mit  $h$  als Doppelpol zusammen die vier Pole einer Geraden bilden

Fig. 36.



[469], so sind diese zugleich diejenigen Punkte, in welchen die Tangenten  $h(a, d)$  [500] die Cayley'sche Curve berühren. Die Gerade  $ad$  aber ist selbst auch eine Tangente der Cayley'schen Curve.

Beweis. Wenn  $abcd$  (Fig. 36) die vier Pole einer Geraden  $G$  (bezüglich der Fundamental-Curve) sind, so sind  $ab, ac, ad$  die drei aus  $a$  an die Cayley'sche Curve gehenden Tangenten [498].

Fallen nun  $b$  und  $c$  in einen Doppelpol  $h$  zusammen, so liegt  $h$  auf der Hesse'schen Curve [467], gleichzeitig fallen dann auch die Tangenten  $ab, ac$  in eine  $ah$  zusammen, und daher

liegt dann  $a$  auf der Cayley'schen Curve und ist der Berührungspunct der Tangente  $ah$  [187]. Ebenso wird  $d$  der Berührungspunct der Tangente  $dh$ , die Gerade  $ad$  aber bleibt Tangente an der Cayley'sche Curve. (*Cremona* art. 135.)

Bemerkung. Ist  $h'$  (Fig. 35) der conjugirte Pol zu  $h$ , und  $a_1, d_1$  die zu  $h'$  als Doppelpol gehörigen einfachen Pole, so sind auch  $a_1, d_1$  die Berührungspuncte der von  $h'$  an die Cayley'sche Curve gehenden Tangenten  $h'(a_1, d_1)$ . Diese beiden Punkte aber liegen nach [472] auf der die Punkte  $a, d$  verbindenden Geraden, welche nach [469] mit  $hh'$  zusammen die conische Polare des Tangentialpunctes  $k'$  von  $h, h'$  bildet.

504. Man kann daher auch sagen: Sind  $h, h'$  (Fig. 35) zwei conjugirte Pole der Hesse'schen Curve, sodass [501]  $hh'$  eine Tangente an der Cayley'schen Curve ist, und zieht man aus  $h$  und  $h'$  die beiden übrigen an die Cayley'sche Curve gehenden Tangentenpaare  $h(a, d)$  und  $h'(a_1, d_1)$ , (welches zugleich die conischen Polaren von  $h'$  und  $h$  sind [469 und 472]), so sind die Berührungspuncte  $a, d, a_1, d_1$  der vier letzteren Tangenten die Durchschnitte derselben mit derjenigen Geraden, welche mit  $hh'$  zusammen eine conische Polare bildet. Diese letztere Gerade  $ad, a_1, d_1, k$  berührt die Cayley'sche Curve und schneidet sie ausserdem in den vier Punkten  $ad, a_1, d_1, k$ .

505. Zwei Tangenten der Cayley'schen Curve, welche die Eigenschaft haben, dass die Verbindungslinie ihrer Berührungspuncte wieder eine Tangente an derselben Curve ist, heissen correspondirende Tangenten. Dann sind diejenigen zwei aus einem Punkte der Hesse'schen Curve an die Cayley'sche Curve gehenden Tangenten, welche zusammen eine conische Polare bilden, stets correspondirende Tangenten [503]. (*Cremona*. art. 135 a.)

506. Lässt man eine Gerade  $G$  sich so bewegen, dass sie fortwährend die Hesse'sche Curve berührt, so dass von ihren vier Polen stets zwei in einen Doppelpol zusammenfallen, so beschreibt der Doppelpol  $h$  die Hesse'sche Curve [468], die beiden einfachen Pole  $a, d$  aber die Cayley'sche Curve, und die Verbindungslinien  $ha, ad, dh$  hüllen die Cayley'sche Curve ein. — [503.] (*Cremona*. art. 135.)

507. Zieht man aus einem Punkte  $h$  der Hesse'schen

Curve an die Cayley'sche eine Tangente  $ha$  (oder  $hd$ ), welche nicht durch den zu  $h$  conjugirten Pol  $h'$  geht (Fig. 35) [500], so ist ihr Berührungspunct  $a$  (oder  $d$ ) der Durchschnitt dieser Tangente mit derjenigen Geraden, welche mit  $h h'$  zusammen eine conische Polare bildet [504] (nämlich die conische Polare des Tangentialpunctes  $k'$  von  $h, h'$  [469]). (*Cremona. art. 135 c.*)

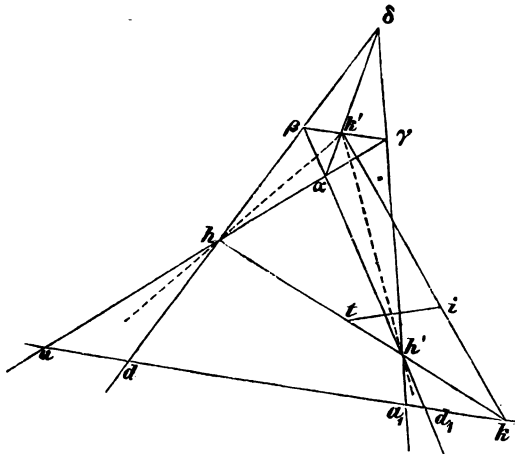
508. Zieht man aus einem Puncte  $h$  der Hesse'schen Curve (Fig. 35) an die Cayley'sche Curve diejenige Tangente, welche durch den zu  $h$  conjugirten Pol  $h'$  hindurchgeht [500] und die Cayley'sche Curve in  $t$  berühren möge; ist ferner  $k$  der dritte Schnittpunct dieser Geraden mit der Hesse'schen Curve,  $k'$  der conjugirte Pol zu  $k$ , und  $i$  der Punct, in welchem die Gerade  $kk'$  die Hesse'sche Curve schneidet, so trifft diejenige Gerade, welche mit  $kk'$  zusammen eine conische Polare bildet und daher [436, 477] durch  $i$  geht, die Tangente  $hh'$  in dem Berührungspuncte  $t$ . — Denn betrachtet man die Tangente  $hh'k$  als von  $k$  ausgehend, so geht sie nicht durch den zu  $k$  conjugirten Pol  $k'$ , und folglich liegt nach [507] ihr Berührungspunct  $t$  auf derjenigen Geraden, welche mit  $kk'$  zusammen eine conische Polare bildet; also auf  $ti$ .

509. (Fig. 35.) Eine Tangente  $ka d$  an der Cayley'schen Curve schneidet diese Curve ausserdem in vier Puncten  $ad, a_1 d_1$  und zwar: ist  $k$  ein Durchschnitt dieser Tangente mit der Hesse'schen Curve und  $kh h'$  diejenige Tangente aus  $k$  an die Cayley'sche Curve, welche mit  $ka d$  zusammen eine conische Polare bildet und daher [477] durch zwei conjugirte Pole  $h h'$  geht, so sind  $ad, a_1 d_1$  die Durchschnitte der ersteren Tangente mit den conischen Polaren von  $h'$  und  $h$ . Ausserdem sind auch  $h(ad)$  und  $h'(a_1 d_1)$  Tangenten an der Cayley'schen Curve, und  $ad, a_1 d_1$  deren Berührungspuncte. — Aus [504], denn jede Tangente der Cayley'schen Curve ist eine Gerade eines polaren Geradenpaares [496], die dazu gehörige andere Gerade aber geht, wie auch die erstere, durch zwei conjugirte Pole der Hesse'schen Curve [477].

510. Trifft eine Tangente an der Cayley'schen Curve die Hesse'sche Curve in den Puncten  $h, h', k$ , von welchen  $h h'$  conjugirte Pole seien [501], so ist ihr Berührungspunct  $t$  harmonisch zugeordnet zu  $k$  in Beziehung auf  $h h'$ . (Fig. 35.) (*Cayley l. c. [499] pag. 417. 425. Cremona art. 135 c.*)

Beweis. Sei  $k'$  der conjugirte Pol zu  $k$ , und  $i$  der dritte Schnittpunct der Hesse'schen Curve mit der Geraden  $kk'$ , so trifft die nach [436, 477] durch  $i$  gehende Gerade, welche mit  $kk'$  zusammen ein polares Geradenpaar bildet, die Tangente  $hh'k$  in dem Berührungspuncte  $t$  [508]. Nun bilden aber die einer conischen Polare angehörigen Geraden  $it$  und  $ik$  die Doppelstrahlen der Involution, deren conjugirte Strahlen von  $i$  nach den conjugirten Polen der Hesse'schen Curve gehen [478], mithin sind die Strahlen  $i(h, h')$  einander harmonisch zugeordnet in Bezug auf  $i(t, k)$ , und daher  $h h' t k$  vier harmonische Punkte.

Fig. 35.



511. (Fig. 35.) Die gemischte gerade Polare (bezüglich der Fundamental-Curve) [275] zweier Punkte der Hesse'schen Curve, von denen der eine,  $k'$ , der Tangentialpunct des anderen,  $h$ , ist, ist eine Tangente der Cayley'schen Curve und verbindet den Berührungspunct  $h$  mit dessen conjugirten Pole  $h'$ . Und umgekehrt: Eine Tangente der Cayley'schen Curve ist die gemischte gerade Polare zweier Punkte der Hesse'schen Curve, von denen der eine der Tangentialpunct des anderen ist; und zwar: sind  $h, h'$  die conjugirten Pole, in welchen die Tangente an der Cayley'schen Curve die Hesse'sche Curve trifft, und  $k'$  deren Tangentialpunct, so ist  $h h'$  die gemischte gerade Polare von  $h$  und  $k'$  (und auch von  $h'$  und  $k$ ).



Beweis. Die gemischte gerade Polare zweier Punkte  $h$  und  $k'$  ist gleichzeitig die Polare von  $h$  in Beziehung auf die conische Polare von  $k'$ , und die Polare von  $k'$  in Beziehung auf die conische Polare von  $h$  [275]. Aber die letztere ist das Geradenpaar  $h'(a_1 d_1)$  und die Polare von  $k'$  in Beziehung auf dieses ist  $h k'$ , da  $h k'$  harmonisch zugeordnet ist zu  $h' k'$  in Beziehung auf  $h'(a_1 d_1)$  [474] oder [502]. Da jede Tangente der Cayley'schen Curve die Hesse'sche Curve in zwei conjugirten Polen trifft [501], so gilt auch das Umgekehrte.

512. Demnach folgt: Die Cayley'sche Curve ist die Einhüllende der gemischten geraden Polaren je zweier Punkte der Hesse'schen Curve, von denen der eine der Tangentialpunkt des andern ist. (*Cremona* art. 138 b.)

## §. 2.

513. Die Cayley'sche Curve, welche von der dritten Classe ist [499], ist zugleich von der sechsten Ordnung, und besitzt daher weder Doppeltangenten noch Wendepunkte, dagegen neun Rückkehrpunkte. [187 Note.]

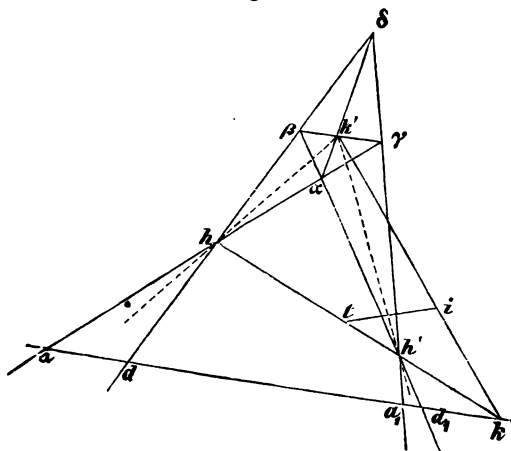
Beweis. Da die Cayley'sche Curve von der dritten Classe ist, so kann sie höchstens von der Ordnung  $3 \cdot 2 = 6$  sein. Nun trifft aber eine Tangente an der Cayley'schen Curve diese ausserdem noch in vier Punkten [509], sodass sie sechs Punkte mit der Curve gemein hat. Demnach ist diese auch nicht von einer niedrigeren Ordnung. (*Cremona* art. 135 b.)

514. Die Hesse'sche und die Cayley'sche Curve schneiden einander gar nicht, sondern berühren einander nur, und zwar in denjenigen neun Punkten, welche die conjugirten Pole der neun Wendepunkte der Hesse'schen Curve (und der Fundamental-Curve) sind. Ihre gemeinschaftlichen Tangenten in diesen neun Punkten sind die Wendetangenten der Fundamental-Curve.

Beweis. (Fig. 35.) Ist  $h$  ein Wendepunkt der Hesse'schen Curve (also auch der Fundamental-Curve) und  $k'$  dessen conjugirter Pol, so berührt die Gerade  $h k'$  die Hesse'sche Curve in  $h$  und ist Wendetangente an der Fundamentalcurve in  $h$ . Es fällt nämlich der dritte Schnittpunkt  $k$  der Geraden  $h k'$  mit der Hesse'schen Curve mit  $h$  zusammen [463]. Nun

ist  $h h'$  auch Tangente an der Cayley'sche Curve, und deren Berührungspunkt  $t$  harmonisch zugeordnet zu  $k$  in Beziehung auf  $h h'$  [510]. Fällt also  $k$  nach  $h'$ , so fällt auch  $t$  in diesen Punkt, und daher berührt die Gerade  $h h'$  in dem Punkte  $h'$  nicht bloss die Hesse'sche Curve, sondern auch die Cayley'sche Curve. Diese beiden Curven haben demnach in den neun zu den Wendepunkten conjugirten Polen achtzehn Punkte mit einander gemein. Da sie resp. von der dritten und sechsten Ordnung sind, so können sie ausserdem keinen Punkt gemeinschaftlich haben. (*Cremona* art. 141 b.)

Fig. 35.



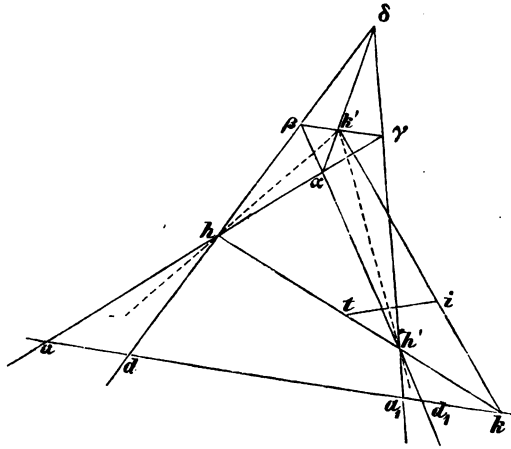
**515.** Die Cayley'sche Curve schneidet die Fundamentalcurve in den achtzehn Punkten, welche die Berührungspunkte der Tangenten sind, die die Fundamentalcurve ausser ihren Wendetangenten mit der Hesse'schen Curve gemeinschaftlich hat [464].

**Beweis.** Ist  $a$  der Berührungspunkt einer dieser gemeinschaftlichen Tangenten auf der Fundamentalcurve (also kein Wendepunkt) so ist er einer der vier Pole dieser Geraden [269]. Da diese auch zugleich die Hesse'sche Curve berührt, etwa in  $h'$ , so fallen zwei Pole derselben in den zu  $h'$  conjugirten Pol  $h$  zusammen [468], und zwei liegen auf der Cayley'schen Curve [506]; da nun der Punkt  $a$  nicht mit  $h$  zusammenfällt, weil er nicht auf der Hesse'schen Curve liegt,

so muss er auf der Cayley'schen Curve liegen. Die achtzehn auf der Fundamentalcurve liegenden Berührungspunkte befinden sich also auch auf der Cayley'schen Curve. Mehr als achtzehn Punkte aber können diese beiden Curven nicht gemeinschaftlich haben. (*Cremona art. 141 a.*)

**516.** Die harmonischen Polaren der neun Wendepunkte der Fundamental- und der Hesse'schen Curve sind die Rückkehrtangenten in den neun Spitzen der Cayley'schen Curve [513].

Fig. 35.



**Beweis.** Wenn  $h$  (Fig. 35) ein Wendepunkt wird, so treten nach [463] und [475] folgende Specialisirungen ein:  $h h'$  wird Wendetangente an der Fundamentalcurve und berührt die Hesse'sche Curve in  $h'$ , sodass  $k$  nach  $h'$  fällt. Von den beiden Geraden  $h'(a_1, d_1)$  welche die conische Polare von  $h$  bilden, fällt die eine, etwa  $h'd_1$ , mit der Wendetangente zusammen, und die andere  $h'a_1$  oder jetzt  $ka_1$  wird die harmonische Polare des Wendepunctes  $h$ . Nun waren aber die beiden jetzt zusammenfallenden Geraden  $a_1 h'$  und  $a_1 k$  Tangenten an der Cayley'schen Curve, und zwar bildete  $a_1$  den Berührungspunkt von  $a_1 h'$  sodass in diese Gerade schon zwei Tangenten zusammenfielen [503], und  $a_1 k$  war die dritte von  $a_1$  an die Cayley'sche Curve gehende Tangente [503]. Da diese dritte jetzt auch mit den beiden ersteren zusammenfällt,

so bilden diese drei in die harmonische Polare von  $h$  zusammenfallenden Geraden eine Rückkehrtangente der Cayley'schen Curve, und  $a_1$  wird der Rückkehrpunkt. [187. Note.] (*Hesse* l. c. [497] pag. 260. *Cremona* art. 141. c.)

## Zehnter Abschnitt.

### Der begleitende Kegelschnitt.

**517.** Zieht man aus einem Puncte  $a$  die sechs Tangenten an eine Curve 3. O., deren Berührungspunkte also [270] auf der conischen Polare von  $a$  liegen, so befinden sich die Tangentialpunkte dieser sechs Berührungspunkte nach [248] auf einem neuen Kegelschnitte, welcher der den Punct  $a$  und die conische Polare desselben begleitende Kegelschnitt genannt werden soll. (*Cremona* art. 138. „conica satellite.“ *Curtze* übersetzt „beigeordneter Kegelschnitt“.)

**518.** Die conische Polare eines Punctes  $a$  und der sie begleitende Kegelschnitt berühren einander in den beiden Puncten, in welchen beide von der geraden Polare von  $a$  getroffen werden. (*Salmon* pag. 68. *Cremona* art. 138.)

Beweis. Sei  $x$  ein beliebiger Punct, und  $z$  einer der Durchschnitte der Geraden  $ax$  mit der Curve 3. O.  $u = 0$ . Dann kann man setzen [19]

$$z_i = a_i + \lambda x_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

und erhält [149] die Werthe von  $\lambda$ , welche den drei Durchschnittspunkten der Geraden  $ax$  mit der Curve zugehören, aus der Gleichung

$$0 = u_a + \lambda \Delta_x(u_a) + \frac{\lambda^2}{2} \Delta_x^2(u_a) + \frac{\lambda^3}{2 \cdot 3} \Delta_x^3(u_a),$$

die man auch schreiben kann [5]

$$0 = u_a + \lambda \Delta_x(u_a) + \lambda^2 \Delta_a(u_x) + \lambda^3 u_x,$$

oder, wenn man zur Abkürzung

$$\Delta_x(u_a) = \Delta', \quad \Delta_a(u_x) = \frac{1}{2} \Delta_x^2(u_a) = \Delta''$$

setzt,

$$(1) \quad 0 = u_a + \lambda \Delta' + \lambda^2 \Delta'' + \lambda^3 u_x.$$

*Dunkel*, Curven dritter Ordnung.

Darin bedeutet  $\mathcal{A}' = 0$  die gerade Polare, und  $\mathcal{A}'' = 0$  die conische Polare des Punctes  $a$  bei veränderlichen  $x_i$  [267]. Soll nun der Punct  $x$  so liegen, dass die Gerade  $ax$  die Curve berührt, so muss die Gleichung (1) zwei gleiche Wurzeln  $\lambda$  haben, die Bedingung dafür aber ist [9]

$$(4u_a\mathcal{A}'' - \mathcal{A}'^2)\mathcal{A}'^2 + (4\mathcal{A}'^3 - 18u_a\mathcal{A}'\mathcal{A}'' + 27u_xu_a^2)u_x = 0.$$

Diese Gleichung stellt bei veränderlichen  $x_i$  den geometrischen Ort aller der Puncte  $x$  dar, für welche die Gerade  $ax$  Tangente an der Curve ist; sie ist also die Gleichung der sechs von  $a$  an die Curve gehenden Tangenten. In der That ist diese Gleichung vom sechsten Grade, da  $\mathcal{A}'$ ,  $\mathcal{A}''$ ,  $u_x$  resp. vom 1., 2., 3. Grade sind, während  $u_a$  eine Constante ist. Setzt man  $u_x = 0$ , so erhält man die Puncte, welche die sechs Tangenten mit der Curve gemein haben. Für  $u_x = 0$  aber wird

$$\mathcal{A}''^2 = 0 \quad \text{und} \quad 4u_a\mathcal{A}'' - \mathcal{A}'^2 = 0.$$

Die erste Gleichung sagt aus, dass ein Theil dieser der Curve und den sechs Tangenten gemeinsamen Puncte auf zwei mit  $\mathcal{A}''$ , d. h. mit der conischen Polare von  $a$ , zusammenfallenden Kegelschnitten liegen, dass die Tangenten also die Curve in den Durchschnitten mit der conischen Polare berühren, wie bekannt [270]. Die zweite Gleichung aber sagt aus, dass die übrigen der Curve und den sechs Tangenten gemeinsamen Puncte (d. i. die Tangentialpuncte der sechs Berührungspuncte) auf dem Kegelschnitte

$$K = 4u_a\mathcal{A}'' - \mathcal{A}'^2 = 0$$

liegen. Dies ist die Gleichung des begleitenden Kegelschnittes. Die Form derselben zeigt, dass der begleitende Kegelschnitt die conische Polare  $\mathcal{A}'' = 0$  in den Puncten berührt, in welchen beide von der geraden Polare  $\mathcal{A}' = 0$  getroffen werden, denn setzt man  $\mathcal{A}' = 0$ , so folgt  $\mathcal{A}''^2 = 0$ , d. h. die Puncte, welche  $\mathcal{A}'' = 0$  und  $K = 0$  gemeinsam haben, liegen auf zwei mit  $\mathcal{A}' = 0$  zusammenfallenden Geraden. (*Salmon* pag. 68.)

519. Hieraus und aus [274] folgt unmittelbar: Die gerade Polare eines Punctes bezüglich einer Curve 3. O. ist gemeinschaftlich die Polare desselben Punctes sowohl in Bezug auf dessen conische Polare, als auch in Bezug auf ihren begleitenden Kegelschnitt, und trifft diese beiden Kegelschnitte in denselben Puncten.

520. Besteht die conische Polare eines Punctes  $a$  aus zwei Geraden  $C, C'$ , (sodass  $a$  auf der Hesse'schen Curve liegt [268]), so besteht auch der begleitende Kegelschnitt aus zwei Geraden, nämlich aus den Begleiterinnen der Geraden  $C$  und  $C'$  [230]. — Denn der begleitende Kegelschnitt geht durch die Tangentialpuncte der Puncte, in welchen  $C$  und  $C'$  die Curve schneiden; diese Tangentialpuncte aber liegen zu je drei auf zwei Geraden, die eben die Begleiterinnen von  $C$  und  $C'$  sind [230]. (*Cremona* art. 138 a.)

521. Bilden zwei Gerade  $C, C'$  die conische Polare eines Punctes  $a$  der Hesse'schen Curve, so schneiden sich ihre Begleiterinnen  $B, B'$  ebenso wie  $C, C'$  [438] in dem zu  $a$  conjugirten Pole  $a'$  der Hesse'schen Curve. — Denn die Polare von  $a$  in Bezug auf die beiden Kegelschnitte  $(C, C')$  und  $(B, B')$  ist eine und dieselbe Gerade [519] und trifft beide in denselben Puncten. Für  $(C, C')$  fallen diese Durchschnittspuncte in  $a'$  zusammen, also auch für  $(B, B')$ . (*Cremona* art. 138 a.)

522. Da der Durchschnittspunct einer Geraden und ihrer Begleiterinn der begleitende Punct der ersteren Geraden ist [230], so folgt: Zwei Gerade, welche die conische Polare eines Punctes  $a$  der Hesse'schen Curve bilden, haben beide den zu  $a$  conjugirten Pol  $a'$  der Hesse'schen Curve zum begleitenden Punct. (*Cremona* art. 138 a.)

523. Da eine einem polaren Geradenpaare angehörige Gerade eine Tangente an der Cayley'schen Curve ist [496], so folgt ferner: Der eine Tangente der Cayley'schen Curve begleitende Punct liegt auf der Hesse'schen Curve, oder anders ausgedrückt: Schneidet eine Tangente der Cayley'schen Curve die Fundamentalcurve in  $abc$ , und sind  $\alpha \beta \gamma$  deren Tangentialpuncte, so liegt der Durchschnitt der Geraden  $abc$  und  $\alpha \beta \gamma$  auf der Hesse'schen Curve.

524. Demnach: Umhüllt eine Gerade die Cayley'sche Curve, so beschreibt der die Gerade begleitende Punct die Hesse'sche Curve, oder: die Hesse'sche Curve ist der geometrische Ort für die begleitenden Puncte der Tangenten der Cayley'schen Curve. (*Cayley* l. c. [499] pag. 439. *Cremona* art. 138 a.)

525. (Fig. 35.) Ist  $h$  ein Punkt der Hesse'schen Curve,  $h'$  der ihm conjugirte Pol und  $h'h$  die Tangente der Hesse'schen Curve in  $h'$ , so sind die Geraden  $h'h$  und  $h'k'$  einander harmonisch zugeordnet, sowohl in Bezug auf die conische Polare von  $h$ , als auch in Bezug auf den begleitenden Kegelschnitt derselben. — Denn die Tangente  $h'k'$  ist die gerade Polare von  $h$  in Beziehung auf die Fundamentalcurve, [459] und daher [519] die Polare von  $h$  sowohl in Bezug auf die conische Polare von  $h$ , als auch in Bezug auf den begleitenden Kegelschnitt.

### Elfter Abschnitt.

Die Poloconik einer Geraden in Verbindung mit der Hesse'schen Curve. Kegelschnitte, welche eine Curve 3. O. in drei Punkten berühren.

#### §. 1.

526. Die Poloconik einer Tangente der Cayley'schen Curve besteht aus zwei Geraden; und umgekehrt: eine Gerade, deren Poloconik aus zwei Geraden besteht, ist eine Tangente der Cayley'schen Curve. — Denn da nach [496] eine Tangente der Cayley'schen Curve stets einem polaren Geradenpaare angehört, und umgekehrt jede solche Gerade die Cayley'sche Curve berührt, so kommen [327] [328] zur Anwendung. (Cayley l. c. [499] pag. 432.)

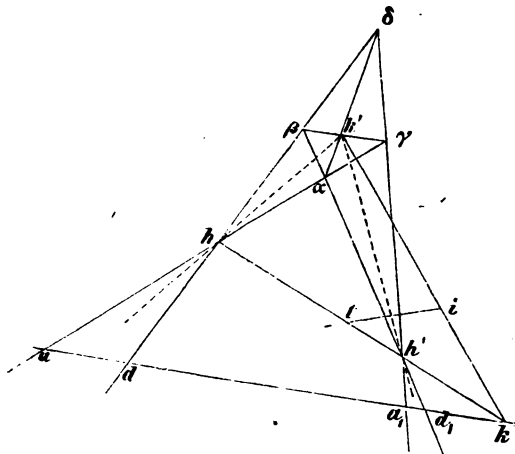
527. Hieraus folgt: Die Cayley'sche Curve ist die Einhüllende der Geraden, deren Poloconiken aus Geradenpaaren bestehn. (Cayley l. c. [499] pag. 432. Cremona art. 136. b.)

528. Die Poloconik der Geraden  $h'h$ , welche zwei conjugirte Pole der Hesse'schen Curve verbindet, besteht aus den Tangenten  $k'(h, h')$  in  $h$  und  $h'$  an der Hesse'schen Curve. (Fig. 35.)

Beweis. Die Gerade  $h'h$  gehört zu einem polaren Geradenpaare, dessen Doppelpunct der dritte Durchschnitt  $k$  der Geraden  $h'h$  mit der Hesse'schen Curve ist [469], folglich ist

die Poloconik von  $h h'$  ein Geradenpaar, das sich in dem Pole jenes polaren Geradenpaares, d. h. in dem zu  $k$  conjugirten Pole  $k'$  schneidet [328]. Nun hat aber die Gerade  $h h'$  mit der conischen Polare von  $h$  zwei Punkte gemein in  $h'$ , also geht nach [321] die Poloconik von  $h h'$  durch  $h$  hindurch; ebenso geht sie auch durch  $h'$ , und folglich ist sie das Geradenpaar  $k'(h, h')$ . Der Punkt  $k'$  aber ist nach [449] der Tangentialpunkt zu  $h$  und  $h'$ . (Cremona art. 136. b.)

Fig. 35.



529. Daraus folgt auch umgekehrt: Eine Tangente der Hesse'schen Curve bildet einen Theil der Poloconik derjenigen Geraden, welche den Berührungspunct  $h$  mit dessen conjugirten Pole  $h'$  verbindet, und der andere Theil dieser Poloconik ist dann die Tangente in  $h'$ .

530. Ferner folgt aus [528] und als Ergänzung zu [329]: Bilden die Geraden  $k(h h', l l')$  ein polares Geradenpaar, welches die Hesse'sche Curve in den conjugirten Polepaaren  $h h'$  und  $l l'$  [477], und ausserdem so wie sich selbst in  $k$  schneidet, so bilden die Poloconiken von  $h h'$  und  $l l'$  die vier aus dem zu  $k$  conjugirten Pole  $k'$  an die Hesse'sche Curve gehenden Tangenten, nämlich resp.  $k'(h, h')$  und  $k'(l, l')$ . (Cremona art. 137. b.)

531. Demnach: Die Hesse'sche Curve, welche nach [330] der geometrische Ort der Doppelpunkte der aus Geraden-



paaren bestehenden Poloconiken ist, ist zugleich die Einhüllende dieser Geradenpaare. (*Cremona* art. 136. b.)

## §. 2.

**532.** Die Poloconik einer beliebigen Geraden  $G$  schneidet die Hesse'sche Curve nicht, sondern berührt sie stets in drei Punkten  $a', b', c'$ , welche die conjugirten Pole sind zu den drei Punkten  $a, b, c$ , in denen die Hesse'sche Curve von der Geraden  $G$  getroffen wird. (*Cremona* art. 137.)

**Beweis.** Nach [315] gehört zu jedem Punkte  $a$  der Geraden  $G$  ein Punkt der Poloconik als Pol von  $G$  in Bezug auf die conische Polare von  $a$ . Liegt nun aber  $a$  auf der Hesse'schen Curve, so ist seine conische Polare ein Geradenpaar, das sich in dem zu  $a$  conjugirten Pole  $a'$  schneidet, und daher ist in Beziehung auf dieses Geradenpaar  $a'$  der Pol der Geraden  $G$  (wie auch jeder anderen Geraden). Demnach ist  $a'$  der zu  $a$  gehörige Punkt der Poloconik. Dann aber berührt nach [316] die gerade Polare von  $a$  die Poloconik in  $a'$ . Da nun dieselbe gerade Polare nach [459] auch die Hesse'sche Curve in  $a'$  berührt, so haben die Hesse'sche Curve und die Poloconik von  $G$  in  $a'$  eine gemeinschaftliche Tangente, berühren einander also in  $a'$ . Dasselbe gilt von  $b'$  und  $c'$ , und da diese beiden Curven auf diese Art sechs Punkte gemeinschaftlich haben, so schneiden sie sich ausserdem nicht mehr.

**Bemerkung.** In dem speciellen Falle, dass die Poloconik aus zwei Geraden besteht, dass also die Gerade  $G$  zwei conjugirte Pole  $h, h'$  der Hesse'schen Curve verbindet [327, 477], bleibt dieser Satz nach [528] gültig, nur tritt an die Stelle des einen Berührungspunctes der Tangentialpunct von  $h, h'$ , in welchem die Poloconik dann auch zwei zusammenfallende Punkte mit der Hesse'schen Curve gemein hat.

**533.** Fallen von den drei Punkten  $a, b, c$  zwei z. B.  $a$  und  $b$  zusammen, so folgt: Berührt eine Gerade  $G$  die Hesse'sche Curve in  $a$  und schneidet sie in  $c$ , so hat die Poloconik von  $G$  in dem zu  $a$  conjugirten Pole  $a'$  eine vierpunctige, und in dem zu  $c$  conjugirten Pole  $c'$  eine zweipunctige Berührung mit der Hesse'schen Curve. (*Cremona* art. 137.)

**534.** Fallen in [532] alle drei Punkte  $a, b, c$  zusammen,

so folgt: Ist  $G$  eine Wendetangente der Hesse'schen Curve, so hat die Poloconik von  $G$  in dem zu dem Wendepuncte  $w$  conjugirten Pole  $w'$  der Hesse'schen Curve mit dieser eine sechspunctige Berührung. (*Cremona. art. 137.*)

Bemerkung. Dies kommt mit [350] überein. Denn  $w'$  ist zugleich der Berührungspunct einer aus  $w$  an die Hesse'sche Curve gehenden Tangente [463].

535. Die sechs Puncte, in welchen die Poloconiken zweier Geraden  $G$  und  $G'$  die Hesse'sche Curve berühren [532], liegen auf einem Kegelschnitte, nämlich auf der gemischten Poloconik von  $G$  und  $G'$ .

Beweis. Ist  $a$  ein Durchschnitt von  $G$  mit der Hesse'schen Curve, so ist der zu  $a$  conjugirte Pol  $a'$  ein Berührungspunct der Poloconik von  $G$  mit der Hesse'schen Curve [532] und zugleich der Durchschnitt des Geradenpaares, das die conische Polare von  $a$  bildet. Bezüglich dieses Geradenpaares aber ist  $a'$  nicht bloss der Pol von  $G$  [532], sondern auch von  $G'$ , und daher nach [333] ein Punct der gemischten Poloconik von  $G$  und  $G'$ . (*Cremona. art. 137. a.*)

Bemerkung. Dass die sechs Berührungspuncte als die conjugirten Pole der sechs Durchschnittspuncte zweier Geraden  $G$  und  $G'$  auf einem Kegelschnitte liegen, folgt schon aus [456], da  $G$  und  $G'$  zusammen einen Kegelschnitt bilden.

536. Sind  $aa'$  und  $bb'$  zwei Paare conjugirter Pole der Hesse'schen Curve,  $\alpha$  und  $\beta$  ihre resp. Tangentialpuncte, so liegen diese sechs Puncte allemal auf einem Kegelschnitt, nämlich auf der gemischten Poloconik von  $aa'$  und  $bb'$ . — Denn die Geradenpaare  $\alpha (a, a')$  und  $\beta (b, b')$  sind nach [528] die Poloconiken von  $aa'$  und  $bb'$ . Diese berühren die Hesse'sche Curve in  $a, a'$  und  $b, b'$ , an die Stelle der beiden dritten Berührungspuncte aber treten nach [532] die Tangentialpuncte  $\alpha$  und  $\beta$ . Mithin ist die Behauptung ein specieller Fall von [535]. (*Cremona. art. 137. a.*)

537. Fallen im Vorigen  $\alpha$  und  $\beta$  zusammen, so folgt: Bilden zwei Paare conjugirter Pole  $aa', bb'$  ein Punctquadrupel, d. h. haben sie einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct  $\alpha$ , so berührt der durch  $aa'bb'\alpha$  gehende Kegelschnitt die Hesse'sche Curve in  $\alpha$ ; dieser Kegelschnitt ist die ge-

mischte Poloconik der Geraden  $aa'$  und  $bb'$ , zugleich aber auch die conische Polare von  $\alpha$  in Beziehung auf die Hesse'sche Curve [269, 270]. (*Cremona*. art. 137. b.)]

538. Daher folgt in Verbindung mit [481]: Die gemischte Poloconik solcher zwei Geraden, die bezüglich der Fundamentalcurve die conische Polare eines Punctes  $\alpha$  der Hesse'schen Curve bilden, ist zugleich die conische Polare von  $\alpha$  bezüglich der Hesse'schen Curve. (*Cremona*. art. 137. b.)

539. Legt man durch die drei Puncte  $a', b', c'$ , in denen die Hesse'sche Curve von der Poloconik einer Geraden  $G$  berührt wird, einen beliebigen Kegelschnitt  $K$ , so haben die Puncte  $\alpha', \beta', \gamma'$ , in denen dieser Kegelschnitt die Hesse'sche Curve trifft, die Eigenschaft, dass diese Curve in ihnen von der Poloconik einer anderen Geraden  $G'$  berührt wird, und dann ist  $K$  nach [535] die gemischte Poloconik von  $G$  und  $G'$ . (*Cremona* art. 137. a.)

Beweis. Der Annahme nach liegen  $a'b'c'\alpha'\beta'\gamma'$  auf dem Kegelschnitt  $K$ . Bezeichnet man ihre conjugirten Pole mit  $a b c \alpha \beta \gamma$ , so liegen diese sechs Puncte nach [456] ebenfalls auf einem Kegelschnitte. Allein  $a b c$  liegen nach [532] auf der Geraden  $G$ , mithin müssen  $\alpha \beta \gamma$  auch auf einer Geraden  $G'$  liegen, und folglich berührt die Poloconik von  $G'$  die Hesse'sche Curve in  $\alpha' \beta' \gamma'$  [532].

### §. 3.

540. Sind  $a_1 b_1 c_1$  drei in gerader Linie liegende Puncte einer Curve 3. O., und nimmt man, indem man die Curve als die Hesse'sche zu einer der drei zugehörigen Fundamentalcurven betrachtet, die in dem entsprechenden Systeme zu  $a_1 b_1 c_1$  conjugirten Pole  $a_2 b_2 c_2$  [485], so folgt aus [532], dass die Curve 3. O. in diesen drei Puncten  $a_2 b_2 c_2$  von einem Kegelschnitte berührt wird, welcher die Poloconik der Geraden  $a_1 b_1 c_1$  in Beziehung auf die gewählte Fundamentalcurve ist.

Bezeichnet man daher mit  $a_2 b_2 c_2$ ,  $a_3 b_3 c_3$ ,  $a_4 b_4 c_4$  die Puncte, welche in den drei verschiedenen Systemen zu  $a_1 b_1 c_1$  als conjugirte Pole gehören, sodass  $a_1 a_2 a_3 a_4$ ,  $b_1 b_2 b_3 b_4$ ,  $c_1 c_2 c_3 c_4$  drei Punctquadrupel bilden [485], deren drei Tangentialpuncte

$\alpha \beta \gamma$  in gerader Linie liegen (weil  $a_1 b_1 c_1$  sich auf einer Geraden befinden [230]), so wird die Curve 3. O. sowohl in  $a_2 b_2 c_2$ , als auch in  $a_3 b_3 c_3$  und in  $a_4 b_4 c_4$  von je einem Kegelschnitte berührt. Demnach gehören jeden drei in gerader Linie liegenden Curvenpuncten  $a_1 b_1 c_1$  drei solche Kegelschnitte zu, und diese sind die Poloconiken der Geraden  $a_1 b_1 c_1$  in Beziehung auf die drei Fundamentalcurven, für welche die gegebene Curve die Hesse'sche ist. (Hesse. Ueber Curven 3. O. Crelle's Journ. Bd. 36. pag. 165.)

**541.** Wenn ein Kegelschnitt eine Curve 3. O. in drei Puncten  $a, b, c$  berührt, und man nimmt zu diesen die conjugirten Pole in jedem der drei Systeme, so bilden dieselben in zweien dieser Systeme wieder die Berührungspuncte je eines Kegelschnittes, in dem dritten Systeme aber liegen sie in gerader Linie.

Beweis. Wenn sechs Curvenpuncte in einem Kegelschnitte liegen, so liegen ihre conjugirten Pole, gleichviel in welchem Systeme diese genommen werden, in einem neuen Kegelschnitte [485, 456]. Da nun hier von den sechs Puncten je zwei zusammenfallen, so fallen auch von ihren conjugirten Polen je zwei zusammen, der neue Kegelschnitt berührt daher die Curve in den conjugirten Polen der Berührungspuncte des ersten Kegelschnittes. Von den drei Kegelschnitten, die man so erhält, degenerirt aber stets einer und nur einer in zwei zusammenfallende Gerade. Denn da  $a, b, c$  die Berührungspuncte eines Kegelschnittes sind, so liegen ihre Tangentialpuncte  $\alpha, \beta, \gamma$  nach [228] in einer Geraden. Dann aber treffen die Seiten  $bc, ca, ab$  des Dreiecks  $abc$  nach [390] die Curve in drei in gerader Linie liegenden Puncten  $a', b', c'$ , und da nun  $abc$  und  $a' b' c'$  die sechs Ecken eines vollständigen Vierseits sind, so sind nach [490]  $a' b' c'$  conjugirte Pole zu  $abc$  in demselben Systeme. Demnach liegen in der That die zu  $abc$  conjugirten Pole  $a' b' c'$  in einem der drei Systeme in einer Geraden. Da nun aber die gegebenen Puncte und ihre conjugirten Pole in den beiden anderen Systemen zugleich die conjugirten Pole der drei Systeme zu  $a' b' c'$  sind, und diese in einer Geraden liegen, so kann dies nach [445] in keinem der anderen Systeme der Fall sein. Wendet man die Bezeichnung von [385, 492] an, sodass z. B.

$a_1 a_k$  und  $a_i a_k$  conjugirte Pole in demselben Systeme sind, und bezeichnet die gegebenen Punkte z. B. mit  $a_1 b_i c_k$ , so sind ihre conjugirten Pole in den drei Systemen folgende:  $a_k b_k c_i$ ,  $a_i b_1 c_k$ ,  $a_k b_k c_1$ , und von diesen liegen nur die drei ersten Punkte in gerader Linie [385]. (*Hesse* l. c. [540] pag. 166. *Cremona* art. 150.)

**542.** Dieselbe Betrachtung ergibt nun auch als Ergänzung zu [226] und [383]: Sind  $\alpha, \beta, \gamma$  drei in gerader Linie liegende Curvenpunkte, und  $a_1, b_i$  die Berührungspunkte von irgend zwei resp. aus  $\alpha$  und  $\beta$  an die Curve gelegten Tangenten, so liegt von den vier Berührungspunkten der von  $\gamma$  ausgehenden Tangenten einer,  $c_i$ , mit  $a_1 b_i$  in gerader Linie, die drei anderen,  $c_k, c_h, c_1$  dagegen bilden mit  $a_1$  und  $b_i$  die Berührungspunkte je eines Kegelschnittes; und diese drei Punkte  $c_k c_h c_1$  sind die conjugirten Pole zu jenem  $c_i$  in den drei verschiedenen Systemen.

**543.** Da nun nach [541] die zu den drei Berührungspunkten conjugirten Pole in einem der drei Systeme allemal in gerader Linie liegen, so folgt aus [540], dass jeder eine Curve dritter Ordnung in drei Punkten berührende Kegelschnitt einer der in [540] betrachteten ist und daher nach [532] angesehen werden kann als die Polconik einer Geraden in Beziehung auf eine der drei Fundamentalcurven, für welche die gegebene Curve die Hesse'sche ist.

Demnach theilen sich alle die Curve in drei Punkten berührenden Kegelschnitte in drei Systeme, ganz entsprechend den drei Systemen conjugirter Pole, und bilden die Polconiken sämtlicher Geraden in Beziehung auf die drei Fundamentalcurven. Für irgend einen dieser Kegelschnitte z. B. mit den Berührungspunkten  $a_1 b_i c_k$  findet man das System, welchem er angehört, wenn man den Punkt  $c_i$  aufsucht, in welchem die Verbindungslinie zweier Berührungspunkte z. B.  $a_1, b_i$  die Curve schneidet. Demjenigen Systeme, in welchem dieser Punkt  $c_i$  zu dem dritten Berührungspunkt  $c_k$  als conjugirter Pol gehört, gehört auch der betrachtete Kegelschnitt an [542]. (*Hesse* l. c. [540] pag. 166.)

**544.** Aus [539] folgt dann unmittelbar: Legt man durch die drei Berührungspunkte  $a, b, c$  eines Kegelschnitts einen beliebigen Kegelschnitt, so sind die drei anderen Durchschnitte

des letzteren mit der Curve die Berührungspuncte eines zweiten Kegelschnittes, der demselben Systeme angehört, wie der erstere. (*Hesse* l. c. [540] pag. 167. *Cremona* art. 150.)

545. Ferner folgt aus [535]: Die sechs Puncte, in denen zwei dem nämlichen Systeme angehörnde Kegelschnitte die Curve berühren, liegen allemal selbst auf einem Kegelschnitte. (*Hesse* l. c. [540] pag. 167. *Cremona* art. 150.)

546. Durch die nämlichen zwei Puncte  $m$  und  $m'$  gehen zwölf Kegelschnitte, welche die Curve 3. O. in drei Puncten berühren, und zwar aus jedem System vier. — Denn nach [324] gehen durch  $m$  und  $m'$  vier Polconiken in Beziehung auf jede der drei Fundamentalcurven. (*Cremona* art. 150.)

547. Wenn in [543] von den drei Berührungspuncten zwei zusammenfallen, so treten Kegelschnitte auf, welche die Curve in einem Puncte vierpunctig und in einem anderen zweipunctig berühren. Alle solche Kegelschnitte theilen sich ebenfalls in drei Systeme und bilden nach [533] die Polconiken der die gegebene Curve berührenden Geraden in Beziehung auf die drei Fundamentalcurven, für welche die gegebene die Hesse'sche Curve ist. In diesem Falle ist, wie sich aus [542] ergibt, der vierpunctige Berührungspunct ein conjugirter Pol zu dem Puncte, in dem die Verbindungslinie der beiden Berührungspuncte (des zweipunctigen und des vierpunctigen) die Curve trifft, und der Kegelschnitt gehört demselben Systeme an, wie diese beiden conjugirten Pole. (*Hesse* l. c. [540] pag. 171.)

#### §. 4.

548. Unter den Kegelschnitten, welche eine Curve 3. O. in drei Puncten berühren [543], befinden sich auch solche, bei welchen alle drei Berührungspuncte zusammenfallen, die also eine sechspunctige Berührung mit der Curve haben. Diese sind nach [534] die Polconiken der neun Wendetangenten der gegebenen Curve in Beziehung auf die drei Fundamentalcurven. Die Berührungspuncte aber sind zugleich die Berührungspuncte der von den Wendepuncten ausgehenden Tangenten [351], und auch die den Wendepuncten in den drei Systemen conjugirten Pole. Es giebt daher 27 solcher Kegel-

schnitte, und eben so viele Punkte, in denen diese die Curve sechspunctig berühren. Sie theilen sich wiederum in drei Systeme, sodass in jedem neun sich befinden. Diese 27 Punkte sollen kurz die Punkte  $\pi$  genannt werden. (*Hesse* l. c. [540] pag. 173. *Cremona* art. 150.)

**549.** Da in diesem Falle der gemeinschaftliche Tangentialpunct eines Wendepunctes und eines ihm conjugirten Poles in den Wendepunct fällt, so bilden drei in gerader Linie liegende Wendepuncte und die drei mal drei ihnen conjugirten Pole ein System von solchen zwölf Punkten, welche zu je dreien auf 16 Geraden liegen [385]. Bezeichnet man daher mit  $a_1 b_1 c_1$  drei in gerader Linie liegende Wendepuncte und wie in [492] mit  $a_h b_h c_h$  die ihnen conjugirten Pole desselben Systemes, so sind dies zugleich drei demselben Systeme angehörige Punkte  $\pi$  [548]. Dann folgt aus [492]: Die Verbindungslinie je zweier Punkte  $\pi$ , die demselben Systeme angehören, geht allemal durch einen Wendepunct [vgl. 387]. Verbindet man jeden Punct  $\pi$  mit den übrigen acht Punkten desselben Systems, so erhält man  $9 \cdot 8 = 72$  Gerade, von denen aber jede zweimal vorkommt. Es giebt daher in jedem Systeme 36 und also im Ganzen 108 solcher Geraden, von denen jede durch einen Wendepunct geht. (*Hesse* l. c. [540] pag. 175. *Cremona* art. 150.)

**550.** Ebenso folgt weiter aus [492] oder [491]: Die Verbindungslinie je zweier Punkte  $\pi$ , welche verschiedenen Systemen angehören, geht durch einen Punct  $\pi$  des dritten Systemes. Verbindet man daher einen Punct  $\pi$  des einen Systemes mit den neun Punkten des zweiten Systemes, so gehen diese neun Geraden durch die neun Punkte des dritten Systems. Wenn man also denselben Punct  $\pi$  mit den neun Punkten des dritten Systemes verbindet, so erhält man dieselben neun Geraden wieder. Man wird demnach sämtliche Geraden erhalten, wenn man diese Operation mit den neun Punkten eines Systems wiederholt. Mithin giebt es  $9 \cdot 9 = 81$  solcher Geraden. (*Hesse* l. c. [540] pag. 175. *Cremona* art. 150.)

**551.** Von den neun Punkten  $\pi$  eines und desselben Systemes liegen 66 mal 6 auf einem Kegelschnitt. — Denn da diese neun Punkte die conjugirten Pole (in demselben

Systeme) der neun Wendepuncte sind, so liegen sechs von ihnen stets auf einem Kegelschnitt, so bald die ihnen conjugirten Wendepuncte auf einem Kegelschnitte liegen [456], was nur möglich ist, wenn die letzteren auf zwei Geraden vertheilt sind. Es gehen aber 12 Gerade durch je drei Wendepuncte [353], und diese lassen sich auf  $\frac{12 \cdot 11}{1 \cdot 2} = 66$  verschiedene Arten zu Geradenpaaren anordnen. (*Hesse* l. c. [540] pag. 175. *Cremona* art. 150.)

552. Durch die neun Puncte  $\pi$  desselben Systems geht keine zweite Curve 3. O. hindurch. — Denn nimmt man irgend sechs dieser Puncte, welche auf einem Kegelschnitt liegen [551], so liegen die übrigen drei nicht auf einer Geraden, da vielmehr die Verbindungslinie von zweien dieser drei letzten durch einen Wendepunct geht [549]; mithin kommt [223] zur Anwendung. (*Hesse* l. c. [540] pag. 176.)

553. Legt man durch einen Punct  $\pi$ , in welchem die Curve 3. O. von einem Kegelschnitte sechspunctig berührt wird, einen anderen Kegelschnitt, der die Curve in  $\pi$  dreipunctig berührt, so sind die drei Puncte, in welchen der letztere die Curve ausserdem trifft, Berührungspuncte für einen dritten Kegelschnitt; und zwar gehört dieser demselben Systeme an, wie der Punct  $\pi$ . — Folgt unmittelbar aus [544], wenn man die drei Puncte  $a b c$  zusammenfallen lässt. (*Hesse* l. c. [540] pag. 176.)

554. Sind  $a b c$  die Berührungspuncte eines Kegelschnitts mit der Curve, und  $\pi$  der Berührungspunct eines demselben Systeme angehörigen und die Curve sechspunctig berührenden Kegelschnittes, so hat derjenige Kegelschnitt, welcher durch  $a b c$  geht und die Curve in  $\pi$  berührt, in  $\pi$  eine dreipunctige Berührung. — Aus [545], da  $a b c$  und  $\pi$  (drei mal genommen) sechs Puncte sind, in denen zwei dem nämlichen Systeme angehörige Kegelschnitte die Curve berühren.

555. Sind  $a b c$  drei nicht in gerader Linie liegende Curvenpuncte, deren Tangentialpuncte aber auf einer Geraden sich befinden, so dass die Seiten des Dreiecks  $a b c$  die Curve in drei in gerader Linie liegenden Puncten treffen [390], so giebt es neun durch  $a b c$  gehende Kegelschnitte, welche die



Curve dreipunctig berühren, und die Berührungspunkte sind die neun Punkte  $\pi$ , welche demselben Systeme angehören, wie der Kegelschnitt, der die Curve nach [542] in  $a b c$  berührt. — Denn soll der durch  $a b c$  gelegte Kegelschnitt die Curve dreipunctig berühren, so müssen die drei Schnittpunkte desselben mit der Curve in einen zusammenfallen. Diese Schnittpunkte aber sind nach [544] die Berührungspunkte eines demselben System angehörigen Kegelschnittes; daher muss der dreipunctige Berührungspunct einer der Punkte  $\pi$  sein. (Hesse l. c. [540] pag. 176.)

### Zwölfter Abschnitt.

**Kegelschnitte, welche eine Curve dritter Ordnung dreipunctig berühren (osculiren).**

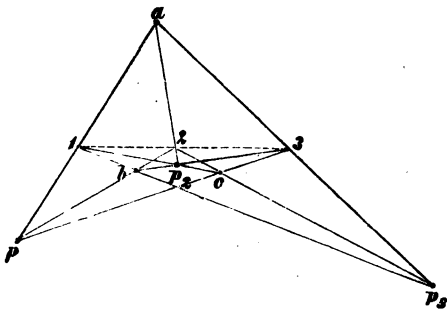
#### §. 1.

556. Zieht man aus einem beliebigen Curvenpunkte  $p$  Strahlen nach den neun Wendepuncten, so sollen die neun Punkte, in denen diese Strahlen die Curve treffen, (oder in denen die Wendepuncte von  $p$  aus auf die Curve projectirt werden) zusammengefasst eine Inflexionsgruppe genannt werden. Eine solche ist jedenfalls bestimmt, sobald einer ihrer Punkte z. B.  $a$ , und ein Wendepunct, z. B. 1, gegeben ist, denn zieht man  $a 1$ , so erhält man den Projectionsmittelpunct  $p$ , und die aus  $p$  nach den acht übrigen Wendepuncten gehenden Strahlen liefern die anderen Punkte der Inflexionsgruppe; wir werden aber später [571] sehen, dass der Wendepunct 1 nicht gegeben zu sein braucht, sondern dass jeder andere an seine Stelle treten kann, ohne dass die Gruppe sich ändert. — Da bei einer Curve ohne Doppelpunct niemals zwei Wendepuncte zusammenfallen, so fallen auch niemals zwei Punkte einer Inflexionsgruppe zusammen; denn dies könnte nur dann eintreten, wenn der Projectionsmittelpunct  $p$  mit zwei Wendepuncten in gerader Linie liegt; dann aber ist  $p$  selbst ein Wendepunct [352], und es zeigt sich in diesem Falle, dass die neun Wendepuncte selbst eine Inflexionsgruppe bilden.

557. Solche drei Punkte einer Inflexionsgruppe, welche die Projectionen von drei in gerader Linie liegenden Wendepuncten bilden, sollen ein Inflexionstripel heissen. Drei in gerader Linie liegende Wendepuncte aber mögen zusammengefasst der Kürze wegen eine Inflexionsgerade genannt werden. Aus der Art, wie die Wendepuncte zu je drei auf Inflexionsgeraden vertheilt sind [353], folgt dann: Die neun Punkte einer Inflexionsgruppe bilden 12 Inflexionstripel, indem sie sich auf vier verschiedene Arten in drei Tripel zerlegen lassen. Jeder Punct der Inflexionsgruppe gehört gleichzeitig vier verschiedenen in dieser Gruppe enthaltenen Tripeln an, und greift man irgend acht Punkte einer Gruppe heraus, so theilen sich diese in vier Paare, der Art dass jedes Paar mit dem neunten Punct der Gruppe ein Tripel bildet. Von vier Tripeln, welche einen reellen Punct gemeinschaftlich haben, ist nur eines reell. Da es 12 Inflexionsgerade giebt, so scheint es, dass jeder Curvenpunct gleichzeitig 12 Tripeln angehören müsste, es wird sich aber zeigen [573], dass nur vier unter diesen von einander verschieden sind.

558. Seien (Fig. 40) 1 2 3 drei in gerader Linie liegende Wendepuncte,  $p$  ein beliebiger Curvenpunct, und die Strahlen  $p1$ ,  $p2$ ,  $p3$  mögen die Curve in den Punkten des Tripels  $a b c$  treffen. Zieht man nun aus einem dieser Punkte, z. B. aus  $a$ , Strahlen nach den beiden Wendepuncten 2 und 3, aus denen  $a$  nicht abgeleitet ist, so erhält man zwei neue Punkte  $p_2$  und  $p_3$  von der Eigenschaft, dass die von ihnen nach den Wendepuncten 1 2 3 gehenden Strahlen wieder die frühern Punkte  $a b c$  (abgesehen von der Ordnung) treffen.

Fig. 40.



Beweis. Man hat hier drei durch den Wendepunct 2 gehende Strahlen 1 2 3,  $p 2 b$ ,  $a 2 p_2$ . Von den sechs Schnittpunkten derselben mit der Curve 1 3  $p b a p_2$  liegen aber der Annahme nach drei, nämlich 1  $p a$ , in einer Geraden, mithin

[347] auch die drei übrigen  $3b p_2$ , d. h. der Strahl  $p_2 3$  geht durch  $b$ . Nun hat man auch drei durch den Wendepunct 3 gehende Strahlen:  $321$ ,  $3p_2 b$ ,  $3pc$ , und von den sechs Schnittpuncten  $21p_2 bpc$  liegen wieder drei:  $2bp$  in einer Geraden, also auch die drei übrigen  $1p_2 c$ , d. h.  $p_2 1$  trifft die Curve in  $c$ . Da sich nun ebenso beweisen lässt, dass die Strahlen  $p_3 3$ ,  $p_3 1$ ,  $p_3 2$  die Curve resp. in  $a$ ,  $b$ ,  $c$  treffen, so erhält man folgende neun Gerade

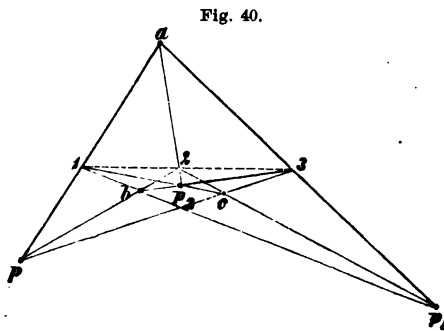
$$\begin{array}{lll} p_1 a & p_2 2 a & p_3 3 a \\ p_2 b & p_2 3 b & p_3 1 b \\ p_3 c & p_2 1 c & p_3 2 c. \end{array}$$

Daher haben die Punkte  $p p_2 p_3$  die Eigenschaft, dass jeder von ihnen die Wendepuncte 123 in dem nämlichen Tripel  $abc$  projecirt. Ausserdem aber zeigt sich, dass  $p p_2 p_3$  gleichzeitig die Projectionen der nämlichen drei Wendepuncte 123 aus jedem der drei Punkte des Tripels  $abc$  sind. Also bilden  $p p_2 p_3$  selbst ein Tripel, welches durch die Wendepuncte 123 in der Weise mit dem ersteren Tripel  $abc$  verbunden ist, dass das eine aus dem anderen entsteht, wenn man die zugehörigen Wendepuncte aus irgend einem Punkte des anderen projecirt. Zwei auf diese Weise von einander abhängige Tripel sollen connexe Inflexionstripel genannt werden. (Mittheilung von Herrn Prof. Küpper.)

Man findet nach dem obigen Schema die durch die Wendepuncte hindurchgehenden Verbindungslinien der Punkte des einen Tripels mit denen des anderen, wenn man die Punkte

des einen Tripels  $abc$  in ihrer Reihenfolge ungeändert lässt und die Wendepuncte cyclisch mit einander vertauscht.

559. (Fig. 40.) Wenn drei Punkte  $abc$  ein Inflexionstripel bilden, so liegt der Tangentialpunct eines jeden auf der Verbindungslinie der beiden anderen, d. h. diese Verbindungslinie trifft die Curve

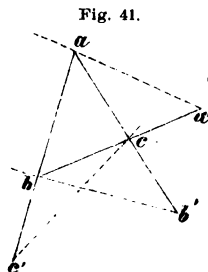


in demselben Punkte, wie die Tangente des ersteren Tripelpunctes.

**Beweis.** Seien  $1\ 2\ 3$  die Wendepuncte, aus denen das gegebene Tripel abgeleitet ist, und sei  $p\ p_2\ p_3$  das dazu gehörige connexe Tripel [558]. Das in  $c$  sich schneidende Geradenpaar  $p_3, p_2\ 1$  bildet einen durch die vier Punkte  $p\ p_2\ 1\ 3$  gehenden Kegelschnitt, der in  $c$  die Curve in zwei zusammenfallenden Punkten trifft. Die Tangente in  $c$  geht also [244 Zus.] durch den den vier Punkten  $p\ p_2\ 1\ 3$  gegenüberliegenden Punkt  $c'$ , der mithin der Tangentialpunkt von  $c$  ist. Nun ist aber das Geradenpaar  $p\ 1, p_2\ 3$  ebenfalls ein durch die nämlichen vier Punkte gehender Kegelschnitt, welcher die Curve in  $a$  und  $b$  trifft. Folglich geht die Gerade  $ab$  auch durch  $c'$ . Für die beiden anderen Punkte ist der Beweis ebenso zu führen. (Mitth. von Herrn Prof. Küpper.)

**560.** Da jeder Punkt einer Inflexionsgruppe gleichzeitig vier verschiedenen in der Gruppe enthaltenen Inflexionstripeln angehört, so folgt: wenn man irgend acht Punkte einer Gruppe in die vier Paare theilt, welche mit dem neunten je ein Tripel bilden [557], so laufen deren vier Verbindungslinien in demselben Curvenpunkte zusammen, nämlich in dem Tangentialpunkte des neunten Punktes der Gruppe. Demnach geht eine Gerade, welche den Tangentialpunkt eines Punktes der Gruppe mit einem zweiten verbindet, stets noch durch einen dritten Punkt derselben. Die Eigenschaft der Wendepuncte, dass die Verbindungslinie von zweien derselben allemal durch einen dritten Wendepunkt geht, ist, wie man sieht, ein specieller Fall des Vorigen. Da ausserdem niemals zwei Punkte einer Inflexionsgruppe zusammenfallen, so folgt, dass niemals zwei derselben Inflexionsgruppe angehörige Punkte einen gemeinschaftlichen Tangentialpunkt haben können.

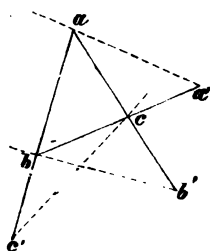
**561.** (Fig. 41.) Wenn von drei Punkten  $a\ b\ c$  einer Curve 3. O. zwei die Eigenschaft haben, dass ihre Tangentialpunkte auf den Verbindungslinien der beiden anderen liegen, so hat auch der dritte Punkt diese Eigenschaft.



**Beweis.** Seien  $a'$  und  $b'$  die Tangentialpunkte von  $a$

und  $b$ , und liege  $a'$  auf  $bc$ ,  $b'$  auf  $ca$ . Schneidet man die Curve mit  $ab$  in  $c'$ , so ist dieser Punkt der gegenüberliegende

Fig. 41.



zu  $abb'a'$  [239], denn da  $a'a$  und  $b'b$  Tangenten sind, so trifft der aus diesen Geraden bestehende Kegelschnitt die Curve zum fünften und sechsten Male in  $a$  und  $b$ . Aber das Geradenpaar  $ab'$ ,  $a'b$  geht ebenfalls durch die vier Punkte  $abb'a'$  und trifft die Curve in  $c$  in zwei zusammenfallenden Punkten, mithin geht die Tangente in  $c$  durch  $c'$ . (Mith. von Herrn Prof. Küpper.)

**562.** Wenn ein Kegelschnitt eine Curve 3. O. in einem Punkte  $a$  dreipunctig berührt (osculirt) und ausserdem in  $qrs$  schneidet, so ist der den vier Punkten  $qrsa$  gegenüberliegende Punkt der Tangentialpunkt von  $a$ . — Denn der in  $a$  osculirende Kegelschnitt des Büschels  $[qrsa]$  trifft die Curve zum fünften und sechsten Male in  $a$ , daher ist die Verbindungslinie dieser beiden Punkte die Tangente in  $a$  [239].

**563.** Wenn vier Curvenpunkte  $qrsa$  so liegen, dass ihr gegenüberliegender Punkt der Tangentialpunkt des einen z. B.  $a$  ist, so giebt es einen Kegelschnitt, der die Curve in  $a$  osculirt und in  $qrs$  schneidet. — Denn da die Tangente in  $a$  die Curve hier in zwei zusammenfallenden Punkten trifft, so giebt es einen Kegelschnitt des Büschels  $[qrsa]$ , der in  $a$  noch zwei, also im Ganzen drei, Punkte mit der Curve gemein hat.

**564.** Wenn drei Curvenpunkte  $abc$  die Eigenschaft haben, dass der Tangentialpunkt eines jeden auf der Verbindungslinie der beiden anderen liegt, und legt man durch einen von ihnen, z. B.  $a$ , einen Kegelschnitt, der die Curve in  $a$  osculirt und ausserdem in  $qrs$  schneidet, so geht durch die letzteren drei Punkte auch ein Kegelschnitt, der die Curve in  $b$ , und einer, der sie in  $c$  osculirt.

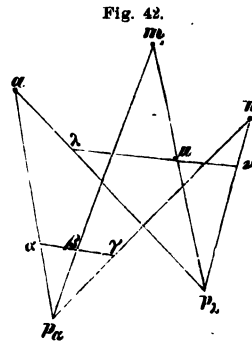
**Beweis.** Seien  $a'b'c'$  die Tangentialpunkte von  $abc$ , dann ist  $a'$  der gegenüberliegende Punkt zu  $qrsa$  [562]. Nun geht aber der Annahme nach  $bc$  durch  $a'$  hindurch, also liegen  $bc$  mit  $qrsa$  in einem neuen Kegelschnitte [244, Zus.]. Betrachtet man diesen als einem Büschel  $[qrsb]$  angehörig,

so trifft die Gerade  $ca$  die Curve in dem gegenüberliegenden Punkte von  $qrsb$ . Dieser Durchschnittspunkt aber ist der Annahme nach  $b'$ , der Tangentialpunkt von  $b$ . Mithin [563] giebt es einen Kegelschnitt, der die Curve in  $b$  osculirt und in  $qrs$  schneidet. Ebenso kann der Beweis für  $c$  geführt werden.

**Zusatz.** Lässt man die Punkte  $qrs$  in einen  $p$  zusammenfallen, sodass ein Kegelschnitt die Curve gleichzeitig in  $p$  und  $a$  osculirt, (dies tritt ein [348], wenn  $p$  der Durchschnitt der Curve mit einer durch  $a$  und einen Wendepunkt gezogenen Geraden ist) so folgt, dass dann auch ein zweiter Kegelschnitt in  $p$  und  $b$ , und ein dritter in  $p$  und  $c$  osculirt. (Mitth. von Herrn Prof. Küpper.)

**565.** Wenn drei Curvenpunkte  $am n$  die Eigenschaft haben, dass der Tangentialpunkt eines jeden auf der Verbindungslinie der beiden anderen liegt, so bilden diese drei Punkte ein Inflexionstripel.

**Beweis.** (Fig. 42.) Verbindet man  $a$  mit einem beliebigen Wendepunkte  $\alpha$  durch eine Gerade, welche die Curve in  $p_\alpha$  treffe, so wird die Curve von einem Kegelschnitte in  $p_\alpha$  und  $a$  osculirt [348]. Mithin [564] giebt es einen zweiten Kegelschnitt, der in  $p_\alpha$  und  $m$ , und einen dritten, der in  $p_\alpha$  und  $n$  osculirt; dann aber treffen die Geraden  $p_\alpha m$  und  $p_\alpha n$  die Curve jede in einem Wendepunkte  $\beta$  und  $\gamma$  [349]. Folglich gehören  $m$  und  $n$  zu der Inflexionsgruppe, welche durch  $a$  und den Wendepunkt  $\alpha$  bestimmt ist [556]. Die drei Wendepunkte  $\alpha \beta \gamma$  aber müssen



in einer Geraden liegen; denn wäre nicht  $\gamma$ , sondern etwa  $\delta$  der mit  $\alpha \beta$  in einer Geraden liegende Wendepunkt, und bezeichnet  $d$  den Punkt, in welchem der Strahl  $p_\alpha \delta$  die Curve trifft, so gehört auch  $d$  jener Inflexionsgruppe an, und  $amd$  würden ein Tripel bilden. Der Tangentialpunkt von  $d$  müsste daher auf  $am$  liegen [559]; aber auf  $am$  befindet sich der Annahme nach der Tangentialpunkt von  $n$ . Also müssten die Tangentialpunkte von  $d$  und  $n$  zusammenfallen, was nicht möglich ist [560]. Demnach sind  $am n$  die Projectionen (aus  $p_\alpha$ ) dreier

in gerader Linie liegender Wendepunkte  $\alpha \beta \gamma$ , und bilden also ein Inflexionstripel.

**566.** Bilden drei Punkte  $a b c$  ein Inflexionstripel, so haben ihre drei Tangentialpunkte  $a' b' c'$  dieselbe Eigenschaft.

Beweis. Nach [559] liegen  $a' b c, b' c a, c' a b$  in je einer Geraden. Sind nun aber  $a'' b'' c''$  die Tangentialpunkte von  $a' b' c'$ , so sind  $a'' b' c', a' b'' c', a' b' c''$  die Tangentialpunkte von resp.  $a' b c, a b' c, a b c'$  und liegen daher wie diese in je einer Geraden [230]; mithin bilden  $a' b' c'$  nach [565] ein Tripel. (Mitth. von Herrn Prof. Küpper.)

**567.** Zieht man aus jedem der drei Punkte eines Tripels  $a b c$  die vier Tangenten an die Curve mit den Berührungspunkten  $a_1 a_2 a_3 a_4, b_1 b_2 b_3 b_4, c_1 c_2 c_3 c_4$ , so bilden diese zwölf Punkte vier Tripel, indem jeder Berührungspunkt  $c$  mit je einem und nur je einem der Punkte  $a$  und  $b$  ein Tripel bildet.

Beweis. Sind  $a' b' c'$  die Tangentialpunkte von  $a b c$ , so liegen  $a' b c$  in gerader Linie, verbindet man also  $a$  mit einem der Berührungspunkte  $b$ , etwa  $b_h$ , so trifft diese Gerade einen der Berührungspunkte  $c$  [383]; dieser sei mit  $c_h$  bezeichnet, sodass

$$a b_h c_h$$

eine Gerade bilden. Nun liegen auch  $a b' c$  in einer Geraden, also trifft die Gerade  $b c_h$  einen der Berührungspunkte  $a$ , der mit  $a_h$  bezeichnet werde, sodass auch

$$a_h b c_h$$

eine Gerade bilden. Demnach haben  $a_h b_h c_h$  die Eigenschaft, dass der Tangentialpunkt  $a$  von  $a_h$  auf  $b_h c_h$ , und der Tangentialpunkt  $b$  von  $b_h$  auf  $a_h c_h$  liegt. Folglich [561] liegt auch der Tangentialpunkt  $c$  von  $c_h$  auf  $a_h b_h$ , und  $a_h b_h c_h$  bilden ein Tripel [565]. — Dieses aber ist das einzige aus den Berührungspunkten bestehende Tripel, welchem der Punkt  $c_h$  angehört. Denn bilden  $a_x b_y c_h$  ein solches, so liegen  $a b_y c_h$  und  $a_x b c_h$  in je einer Geraden; die Punkte aber, in denen die Geraden  $a c_h$  und  $b c_h$  die Curve treffen, sind nach dem Obigen  $b_h$  und  $a_h$ , also fällt  $a_x$  mit  $a_h$ , und  $b_y$  mit  $b_h$  zusammen.

**568.** Wenn ein Kegelschnitt die Curve in einem Punkte

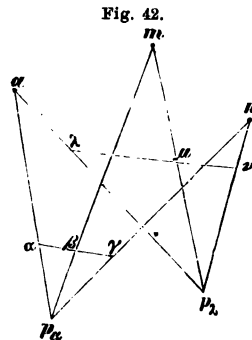
$a$  eines Tripels  $abc$  osculirt und ausserdem in  $qrs$  schneidet, so liegen  $qrs$  mit  $abc$  in einen neuen Kegelschnitte. — Denn der den vier Puncten  $qrsa$  gegenüberliegende Punct ist der Tangentialpunct  $a'$  von  $a$  [562], aber  $bc$  geht auch durch  $a'$  hindurch [559], also liegen  $bc$  auf einem Kegelschnitte des Büschels  $[qrsa]$  [244 Zus.].

569. Legt man durch die Puncte eines Tripels  $abc$  einen beliebigen Kegelschnitt, der die Curve ausserdem in  $qrs$  schneidet, so geht durch  $qrs$  ein Kegelschnitt, der in  $a$ , ein zweiter, der in  $b$ , und ein dritter, der in  $c$  osculirt. — Denn schneidet  $bc$  die Curve in  $a'$ , so liegt  $a'$  den vier Puncten  $qrsa$  gegenüber; er ist aber, weil  $abc$  ein Tripel bilden, zugleich der Tangentialpunct von  $a$  [559], mithin osculirt ein durch  $qrs$  gehender Kegelschnitt die Curve in  $a$  [563]. Ebenso ist der Beweis für  $b$  und  $c$  zu führen.

Zusatz. Fallen  $qrs$  in einen Punct  $p$  zusammen, so folgt: Geht ein Kegelschnitt durch die Puncte eines Tripels  $abc$  und osculirt gleichzeitig in  $p$ , so giebt es drei Kegelschnitte, die in  $p$  und  $a$ , in  $p$  und  $b$ , und in  $p$  und  $c$  osculiren; und daraus folgt weiter [349]: Trifft ein in  $p$  osculirender Kegelschnitt die Curve in drei Puncten eines Tripels  $abc$ , so gehen die Strahlen  $pa$ ,  $pb$ ,  $pc$  durch drei Wendepuncte, welche auch in gerader Linie liegen, weil sonst  $abc$  nicht ein Tripel bilden würden.

570. (Fig. 42.) Es sei eine Inflexionsgruppe  $abc \dots i$  durch einen ihrer Puncte z. B.  $a$  und durch einen beliebigen Wendepunct  $\alpha$  bestimmt, indem der Punct  $p_\alpha$ , in welchem  $a\alpha$  die Curve trifft, der zugehörige Projectionsmittelpunct sei. Zieht man nun aus  $a$  eine Gerade durch irgend einen anderen Wendepunct  $\lambda$  und schneidet damit die Curve in  $p_\lambda$ , so treffen die aus  $p_\lambda$  nach den neun Wendepuncten gehenden Strahlen die Curve (abgesehen von der Ordnung) in den nämlichen neun Puncten  $abc \dots i$ , wie die von  $p_\alpha$  ausgehenden Strahlen.

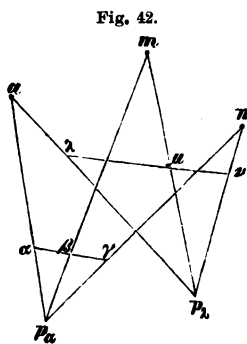
Beweis. Ist  $\mu$  irgend ein Wendepunct, und trifft  $p_\lambda \mu$  die Curve in  $m$ , so ist zu beweisen, dass  $m$  mit einem der





Puncte  $a b c \dots i$  zusammenfällt. Dies ist zunächst klar, wenn  $\mu$  auf  $\lambda$  fällt, denn dann fällt  $m$  auf  $a$ . Ist aber  $\mu$  von  $\lambda$  verschieden, so giebt es einen Wendepunct  $v$ , der mit  $\lambda \mu$  in einer Geraden liegt [352]. Trifft dann der Strahl  $p_\lambda v$  die Curve in  $n$ , so bilden  $a m n$  ein Tripel. Mithin [559] haben diese drei Puncte die Eigenschaft, dass der Tangentialpunct eines jeden auf der Verbindungslinie der beiden anderen liegt. Dann aber ist in [565] bewiesen, dass wenn  $a \alpha p_\alpha$  gezogen wird, (wo  $\alpha$  jeder beliebige Wendepunct sein kann), die Geraden  $p_\alpha m$  und  $p_\alpha n$  durch zwei Wendepuncte  $\beta$  und  $\gamma$  hindurchgehen, welche mit  $\alpha$  in einer Geraden liegen. Mithin gehört sowohl  $m$  als auch  $n$  der Inflexionsgruppe  $a b c \dots i$  an.

Bemerkung. Wenn von den Puncten  $\alpha \beta \gamma$  einer mit



einem der Puncte  $\lambda \mu \nu$  zusammenfällt, so fallen die ersteren drei alle auf die letzteren drei. — Um dies zu beweisen, sei  $\xi$  der Wendepunct, der beiden Inflexionsgeraden gemeinschaftlich ist, und  $x$  der Durchschnitt des Strahls  $p_\alpha \xi$  mit der Curve, sodass  $x$  einer der Puncte  $a m n$  ist. Zieht man aus  $x$  Strahlen nach  $\lambda \mu \nu$  und schneidet damit die Curve in  $x_\lambda x_\mu x_\nu$ , so ist  $p_\alpha$  einer dieser drei Puncte, weil einer der von  $x$  nach  $\lambda, \mu, \nu$  gehenden Strahlen auch mit einer der drei Geraden  $a\alpha, m\beta, n\gamma$  zusammenfällt. Nun bilden  $x_\lambda x_\mu x_\nu$  mittelst der Wendepuncte  $\lambda \mu \nu$  das zu  $a m n$  connexe Tripel, daher [558] gehen die von jedem der drei Puncte  $x_\lambda x_\mu x_\nu$ , und also auch von  $p_\alpha$ , nach  $a m n$  führenden Strahlen durch  $\lambda \mu \nu$ , mithin fallen  $\alpha \beta \gamma$  mit  $\lambda \mu \nu$  zusammen. Es kann demnach nur einer der beiden Fälle stattfinden: entweder fallen die beiden Inflexionsgeraden  $\lambda \mu \nu$  und  $\alpha \beta \gamma$  ganz zusammen, oder sie haben keinen Wendepunct gemeinschaftlich.

571. In Folge des vorigen Satzes ist eine Inflexionsgruppe  $a b c \dots i$  durch einen ihrer Puncte,  $a$ , schon vollkommen bestimmt, sodass jeder Curvenpunct einer und nur einer einzigen Inflexionsgruppe angehört; denn zieht man aus  $a$  Strahlen nach den neun Wendepuncten und schneidet damit die Curve in  $p_1 p_2 \dots p_9$ , so werden die Wendepuncte aus

jedem dieser Punkte  $p$  in der nämlichen Inflexionsgruppe projicirt. Diese Punkte  $p$  bilden dann selbst eine Inflexionsgruppe, die nun ihrerseits wieder aus jedem der Punkte  $a b c \dots i$  als Projectionsmittelpunct entsteht. Die beiden Gruppen  $a b c \dots i$  und  $p_1 p_2 \dots p_9$  sind daher in dem Sinne von [558] mit einander *connex*. Die 81 Geraden, welche entstehen, wenn man jeden Punct der einen Gruppe mit jedem der anderen verbindet, schneiden sich also zu je neun in den neun Wendepuncten.

572. Wenn ein Punct,  $a$ , einer Inflexionsgruppe der Berührungspunct einer von einem Wendepuncte, 1, ausgehenden Tangente ist, so fällt  $p$  mit  $a$  zusammen, daher fällt auch die *connexe* Gruppe ganz auf die ursprüngliche. Jeder Punct der Gruppe hat dann die nämliche Eigenschaft wie  $a$ , nämlich jeder hat einen Wendepunct zu seinem Tangentialpunct; denn ist  $a b c$  irgend ein in der Gruppe enthaltenes Tripel, entstanden durch den Projectionsmittelpunct  $p(=a)$  und die Wendepuncte 1 2 3, so geht jetzt  $a 2$  durch  $b$ , und  $a 3$  durch  $c$ , ausserdem liegt 1 als Tangentialpunct von  $a$  auf  $b c$ , also liegen 1 2 3 resp. auf  $b c$ ,  $a b$ ,  $c a$  und sind daher [559] die Tangentialpuncte von resp.  $a$ ,  $c$ ,  $b$ . Jeder Punct der Gruppe aber gehört mit  $a$  zu irgend einem in der Gruppe enthaltenen Tripel\*).

573. Da nach [571] ein gegebener Curvenpunct nur einer einzigen Inflexionsgruppe angehört, so kann derselbe auch nur solchen Tripeln angehören, welche in dieser Gruppe enthalten sind. Daher gehört jeder Curvenpunct gleichzeitig nur vier verschiedenen Tripeln an, und von den zwölf Tripeln, welche wegen der zwölf Inflexionsgeraden denkbar sind, sind nur vier von einander verschieden. In der That lässt sich leicht beweisen, dass jedes Tripel gleichzeitig durch drei verschiedene Inflexionsgerade erzeugt werden kann, und zwar durch solche drei, von denen keine zwei einen Wendepunct gemeinschaftlich haben, die also zusammen alle neun Wendepuncte enthalten.

---

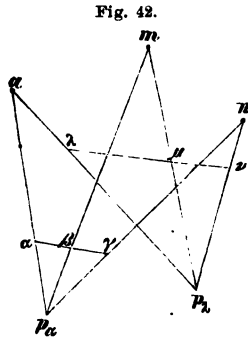
\*) In diesem Falle sind die Punkte der Inflexionsgruppe neun demselben Systeme angehörige Punkte  $\pi$ . [548.]

Beweis. (Fig. 42.) Ist  $a m n$  ein Tripel, erzeugt durch die Inflexionsgerade  $\lambda \mu \nu$  und den Projectionsmittelpunct  $p_\lambda$ , und ist  $\alpha$  ein von  $\lambda \mu \nu$  verschiedener Wendepunct, so giebt es nach [570] eine zweite ganz von  $\lambda \mu \nu$  verschiedene Inflexionsgerade  $\alpha \beta \gamma$ , die das nämliche Tripel  $a m n$  aus dem Projectionsmittelpuncte  $p_\alpha$  erzeugt. Ist dann ferner  $\delta$  ein neuer von  $\lambda \mu \nu$  und  $\alpha \beta \gamma$  verschiedener Wendepunct, so giebt es ebenso noch eine dritte von den beiden vorigen verschiedene Inflexionsgerade  $\delta \varepsilon \kappa$ , die das gegebene Tripel ebenfalls erzeugt. Es giebt aber auch nicht mehr, als diese drei Geraden; denn ist  $\alpha$  einer der Punkte  $\lambda \mu \nu$ , so erhält man nach [570] keine neue Gerade. Wählt man aber statt  $\alpha$  irgend einen anderen von  $\lambda \mu \nu$  verschiedenen Wendepunct, so gehört derselbe nothwendig einer der beiden Inflexionsgeraden  $\alpha \beta \gamma$  oder  $\delta \varepsilon \kappa$  an, und liefert daher ebenfalls keine neue Gerade.

Zusatz. Da einem Tripel in Verbindung mit einer Inflexionsgeraden, aus der es entsteht, stets ein connexes Tripel zugehört, so folgt dass jedes Inflexionstripel drei mit ihm connexe Tripel besitzt. Die neun Punkte dieser connexen Tripel bilden dann zusammen die connexe Inflexionsgruppe zu der, welcher das gegebene Tripel angehört. Demnach kann für ein in einer Inflexionsgruppe enthaltenes Tripel jeder Punkt der connexen Gruppe als Projectionsmittelpunct dienen; und umgekehrt: von jedem Punkte der connexen Gruppe gehen die Strahlen, welche nach den Punkten eines in der ursprünglichen Gruppe enthaltenen Tripels führen, durch drei in gerader Linie liegende Wendepuncte.

574. Um nun vollständig übersehen zu können, wie die Punkte einer Inflexionsgruppe mit denen der connexen Gruppe durch die einzelnen Wendepuncte 1 2 3 4 5 6 7 8 9 verknüpft sind, gehen wir von irgend einem Curvenpuncte  $a$  und einem Wendepuncte 1 aus, schneiden die Curve mit  $a 1$  in  $p_1$  und bezeichnen die Punkte nach welchen die Strahlen

$$p_1(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)$$



führen, der Reihe nach mit

$$a b c d e f g h i;$$

und die Punkte, in welchen die Strahlen

$$a(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9)$$

die Curve treffen, mit

$$p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5\ p_6\ p_7\ p_8\ p_9.$$

Es entsteht dann die Aufgabe, wenn irgend einer der Punkte  $p$  und irgend ein Wendepunkt gegeben ist, den Punkt anzugeben, in welchem die Verbindungslinie beider die Curve trifft. Dazu bedienen wir uns in Beziehung auf die Vertheilung der Wendepunkte auf die Inflexionsgeraden der in [354]-gewählten Bezeichnung, nach welcher die Inflexionsgeraden folgende sind:

$$\begin{array}{cccc} 123 & 147 & 159 & 168 \\ 456 & 258 & 267 & 249 \\ 789 & 369 & 348 & 357. \end{array}$$

Man muss nun unterscheiden, ob der gegebene Wendepunkt der Punkt 1 oder ein anderer ist. Ist 1 gegeben und ausserdem beispielsweise  $p_5$ , so suche man den Wendepunkt, der mit 15 in einer Geraden liegt; dieser ist 9; und bestimme die Punkte, zu welchen die Strahlen  $p_1(1\ 5\ 9)$  führen:  $a\ e\ i$ . Dann bilden die Punkte  $p_1\ p_5\ p_9$ , nach denen die Strahlen  $a(1\ 5\ 9)$  hingehen, das mit  $a\ e\ i$  connexe Tripel. Man kann daher das Schema aufstellen:

$$\begin{array}{lll} \text{Tripel} & a & e\ i \\ \text{Inflexionsgerade} & 1 & 5\ 9 \\ \text{Connexes Tripel} & p_1 & p_5\ p_9. \end{array}$$

Diese neun Punkte liegen nun nach der in [558] gegebenen Regel auf folgenden neun Geraden

$$\begin{array}{lll} p_1\ 1\ a & p_5\ 5\ a & p_9\ 9\ a \\ p_1\ 5\ e & p_5\ 9\ e & p_9\ 1\ e \\ p_1\ 9\ i & p_5\ 1\ i & p_9\ 5\ i; \end{array}$$

mithin führt  $p_5\ 1$  nach  $i$ .

Für den zweiten Fall, dass der gegebene Wendepunkt von 1 verschieden ist, sei derselbe beispielsweise 3, und der gegebene Punkt  $p$  sei wieder  $p_5$ . Dann sucht man den Wendepunkt, der mit 35 in einer Geraden liegt: 7, und zugleich

die beiden Inflexionsgeraden, die von der vorigen 357 vollständig verschieden sind, nämlich 168 und 249. Von diesen enthält eine den Wendepunct 1, hier 168. (Eine Ausnahme hievon tritt nur ein, wenn die beiden an Stelle von 3 und 5 in Betracht kommenden Wendepuncte mit 1 in gerader Linie liegen; dann aber kann sofort das Verfahren des ersten Falles in Anwendung kommen.) Nun gehen die Strahlen  $p_1(1\ 6\ 8)$  durch  $a\ f\ h$ . Das nämliche Tripel wird aber [573] auch durch die Inflexionsgeraden 357 und 249 erzeugt; zu Projectionsmittelpuncten kann man beidemal jeden der Puncte wählen, die mit  $a\ f\ h$  connexe Tripel bilden, man wird aber diese Wahl so treffen, dass bei der einen Geraden der gegebene Punct  $p_3$  Projectionsmittelpunct ist, und bei der anderen der Punct, der mit  $p_1$  und  $p_5$  ein Tripel bildet, also hier  $p_9$ . Man hat dann folgendes Schema: .

Tripel	$a\ f\ h$	$a\ f\ h$	$a\ f\ h$
Inflexionsgerade	1 6 8	3 5 7	2 4 9
Projectionsmittelpunct	$p_1$	$p_5$	$p_9$

Da nun in der zweiten Gruppe dieses Schema's  $p_5$  5 nach  $a$  geht, so hat man nur noch zu entscheiden, ob  $p_5$  3 nach  $f$  oder nach  $h$  führt. Zu dem Ende betrachten wir auch das Tripel  $p_1\ p_5\ p_9$ . Dieses entsteht ebenfalls durch drei Inflexionsgeraden, nämlich zuerst durch 1 5 9, und dann durch die beiden von diesen vollständig verschiedenen Geraden d. i. 2 6 7 und 3 4 8. Bei der ersten ist  $a$  Projectionsmittelpunct, bei der zweiten und dritten aber  $f$  und  $h$ , weil  $p_1$  6 und  $p_1$  8 nach diesen Puncten führen. Man hat also noch ein zweites Schema, nämlich:

Tripel	$p_1\ p_5\ p_9$	$p_1\ p_5\ p_9$	$p_1\ p_5\ p_9$
Inflexionsgerade	1 5 9	2 6 7	3 4 8
Projectionsmittelpunct	$a$	$f$	$h$ ,

und darin liefert die letzte Gruppe die Entscheidung, dass  $p_5$  3 nach  $h$  führt.

575. Nach dem Vorigen kann man nun leicht eine Tabelle entwerfen, welche die Verknüpfung der Puncte der beiden Inflexionsgruppen mit den Wendepuncten vollständig darstellt. Dabei liefert die Anwendung des angegebenen Verfahrens immer gleichzeitig mehrere Bestimmungen. Die Tabelle

wird aber noch beträchtlich leichter hergestellt, wenn man bemerkt, dass vermöge der für die Wendepuncte gewählten Bezeichnung die drei Tripel  $a b c$ ,  $d e f$ ,  $g h i$  jedes durch die Inflexionsgeraden 1 2 3, 4 5 6, 7 8 9 entsteht, und dass ferner zu jedem die drei folgenden  $p_1 p_2 p_3$ ,  $p_4 p_5 p_6$ ,  $p_7 p_8 p_9$  als connexe Tripel zugehören. Denn dies hat zur Folge, dass die Puncte jedes der obigen drei Tripel immer beisammen bleiben und sich nur cyclisch unter einander vertauschen. Man gelangt hiedurch zu einer vollständigen Uebersicht, die in der folgenden leicht verständlichen Tabelle dargestellt ist:

	1 2 3	4 5 6	7 8 9
$p_1$	$a b c$	$d e f$	$g h i$
$p_2$	$c a b$	$f d e$	$i g h$
$p_3$	$b c a$	$e f d$	$h i g$
$p_4$	$g h i$	$a b c$	$d e f$
$p_5$	$i g h$	$c a b$	$f d e$
$p_6$	$h i g$	$b c a$	$e f d$
$p_7$	$d e f$	$g h i$	$a b c$
$p_8$	$f d e$	$i g h$	$c a b$
$p_9$	$e f d$	$h i g$	$b c a$

**576.** Irgend zwei Inflexionstripel, welche connexen Inflexionsgruppen angehören, liegen allemal in einem Kegelschnitt.

**Beweis.** Ist  $a b c$  ein der einen Gruppe angehöriges Tripel, und  $p_\lambda$  irgend ein Punct der connexen Gruppe, so gehen die Strahlen  $p_\lambda(a b c)$  durch drei in gerader Linie liegende Wendepuncte [573], und folglich [232] giebt es einen Kegelschnitt, der durch  $a b c$  geht und in  $p_\lambda$  osculirt. Bilden dann  $p_\mu, p_\nu$  mit  $p_\lambda$  ein Tripel, so liegen  $p_\lambda p_\mu p_\nu$  nach [568] mit  $a b c$  in einem Kegelschnitt.

**577.** Wenn zwei Inflexionstripel  $a b c$  und  $x y z$  in einem Kegelschnitte liegen, so gehören sie connexen Inflexionsgruppen an.

**Beweis.** Da durch das Tripel  $x y z$  ein Kegelschnitt geht, der in  $a b c$  schneidet, so giebt es drei durch  $a b c$  gehende Kegelschnitte, die resp. in  $x, y$  und  $z$  osculiren [569]; da aber  $a b c$  selbst ein Tripel bilden, so treffen die von  $x, y$

und  $z$  nach  $abc$  führenden Strahlen die Curve in Wendepunkten [569 Zus.], und folglich gehören  $abc$  und  $xyz$  connexen Inflexionsgruppen an.

## §. 2.

578. Legt man durch einen beliebigen Curvenpunct  $a$  einen in  $a$  osculirenden Kegelschnitt, der die Curve ausserdem in  $qrs$  schneidet, so sind die acht Punkte, welche mit  $a$  zusammen eine Inflexionsgruppe bilden, ebenfalls Osculationspunkte für Kegelschnitte, die durch  $qrs$  hindurch gehen. — Denn diese acht Punkte zerfallen in vier Paare, von denen jedes mit  $a$  ein Inflexionstripel bildet [557]. Jeder Punct aber der mit  $a$  zu einem Tripel gehört, ist Osculationspunct für einen durch  $qrs$  gehenden Kegelschnitt [559, 564].

Bemerkung. Wenn die Punkte  $a$  und  $qrs$  reell sind, so sind von diesen neun osculirenden Kegelschnitten nur drei reell, weil  $a$  nur einem reellen Tripel angehört [557].

579. Wenn ein in  $a$  osculirender Kegelschnitt die Curve in  $qrs$  schneidet, so giebt es keine anderen durch  $qrs$  gehenden osculirenden Kegelschnitte, als diejenigen, deren Osculationspunkte mit  $a$  zu derselben Inflexionsgruppe gehören.

Beweis. Sei  $x$  der Osculationspunct irgend eines durch  $qrs$  gehenden und osculirenden Kegelschnittes,  $a'$  und  $x'$  die Tangentialpunkte von  $a$  und  $x$ . Dann ist [562]

$a'$  der gegenüberliegende Punct zu  $qrsa$

$x'$  „ „ „ „  $qrsx$ .

Betrachtet man nun den durch  $qrsax$  gehenden Kegelschnitt, der die Curve zum sechsten Male in  $y$  schneiden möge, einmal als dem Büschel  $[qrsa]$  und dann als dem Büschel  $[qrsx]$  angehörig, so geht

$xy$  durch  $a'$

$ay$  durch  $x'$ ,

d. h. die Punkte  $axy$  haben die Eigenschaft, dass der Tangentialpunct von  $a$  auf  $xy$ , und der von  $x$  auf  $ya$  liegt, mithin [561] liegt auch der Tangentialpunct von  $y$  auf  $ax$ , und  $axy$  bilden ein Inflexionstripel [565]. Also befinden sich  $x$

und  $y$  unter den Punkten der zu  $a$  gehörigen Inflexionsgruppe [573].

**Zusatz.** Wenn also durch die Curvenpunkte  $qrs$  ein osculirender Kegelschnitt gelegt werden kann, so gehen durch diese Punkte neun solche Kegelschnitte und nicht mehr als neun, und ihre Osculationspunkte bilden eine Inflexionsgruppe.

**580.** Durch drei beliebig gegebene Punkte  $qrs$  einer Curve 3. O.  $u$  lässt sich immer ein die Curve osculirender Kegelschnitt legen. Es giebt also stets neun solche Kegelschnitte, und deren Osculationspunkte bilden eine Inflexionsgruppe. (Steiner. Crelle 32. pag. 300.)

**Beweis.** Nimmt man  $qrs$  als die Hauptpunkte einer Steiner'schen Verwandtschaft [200] an, so entspricht in dieser Verwandtschaft der Curve  $u$  eine andere Curve 3. O.  $u'$ , welche auch durch die Punkte  $qrs$  hindurchgeht [206] und keine Doppelpunkte hat, wenn die Curve  $u$  keine solchen besitzt [207]. Ist nun  $a'$  ein Wendepunkt von  $u'$ , und  $A'$  dessen Wendetangente, so hat die letztere in  $a'$  mit der Curve  $u'$  drei Punkte gemein. Der Geraden  $A'$  aber entspricht ein Kegelschnitt  $A$ , welcher durch die Punkte  $qrs$  geht [202], und seinerseits in  $a$  mit der Curve  $u$  drei Punkte gemein haben muss, also diese Curve in  $a$  osculirt. Die neun Osculationspunkte  $a$ , welche eine Inflexionsgruppe bilden, entsprechen also den neun Wendepunkten der Curve  $u'$ . (F. August. Crelle 68. pag. 241.)

**581.** Ist  $L'$  eine Gerade, welche drei Wendepunkte  $a'b'c'$  der Curve  $u'$  [580] verbindet, so entspricht ihr ein Kegelschnitt  $L$ , welcher durch  $qrs$  und durch die drei den Wendepunkten  $a'b'c'$  entsprechenden Osculationspunkte  $abc$  auf der Curve  $u$  geht. Da nun nach [568] der durch  $qrs$  und zwei Osculationspunkte  $ab$  bestimmte Kegelschnitt die Curve in demjenigen Punkte  $c$  trifft, welcher mit  $ab$  ein Tripel bildet, so entspricht dreien in gerader Linie liegenden Wendepunkten der Curve  $u'$  ein Inflexionstripel auf  $u$ .

Verfolgt man nun entweder in [557] die verschiedenen in einer Inflexionsgruppe enthaltenen Tripel, oder die Geraden, auf denen die Wendepunkte der Curve  $u'$  vertheilt liegen, so ergiebt sich folgendes: Von den neun Osculationspunkten



$ab \dots i$  liegen zwölf mal drei mit  $qrs$  in je einem Kegelschnitte  $L$ ; nämlich die zwölf Tripel, die in der von den Punkten  $ab \dots i$  gebildeten Inflexionsgruppe enthalten sind. Diese zwölf Kegelschnitte  $L$  bilden auf vier verschiedene Arten Gruppen von drei Kegelschnitten, welche durch alle neun Punkte  $ab \dots i$  hindurchgehen; durch jeden der Punkte  $ab \dots i$  gehen vier von ihnen, und vier von ihnen sind reell. (Steiner. Crelle 32. pag. 300.)

582. Aus einem Wendepunkte  $a'$  der Curve  $u'$  gehen drei Tangenten an diese Curve, und die drei Berührungspunkte  $m'_1, m'_2, m'_3$  liegen in einer Geraden [341]. Nun entspricht jeder Tangente ein durch  $qrs a$  gehender Kegelschnitt, welcher die Curve  $u$  in einem Punkte  $m$  berührt; der durch die drei Punkte  $m'$  gehenden Geraden aber entspricht ein durch  $qrs$  und die drei entsprechenden Punkte  $m$  gehender Kegelschnitt. Also folgt: Durch drei Punkte  $qrs$  einer Curve 3. O.  $u$  und irgend einen der zugehörigen Osculationspunkte  $a$  lassen sich drei Kegelschnitte legen, welche die Curve  $u$  in den Punkten  $m_1, m_2, m_3$  berühren, und diese letzteren drei Punkte liegen wieder mit  $qrs$  in einem Kegelschnitte. (Steiner. Crelle 32. pag. 300.)

583. Die 27 Berührungspunkte  $m'$  der aus den Wendepunkten der Curve  $u'$  an diese gezogenen Tangenten haben nach [351] die Eigenschaft, dass die Curve  $u'$  in jedem von ihnen von einem Kegelschnitte sechspunctig berührt wird. Einem Kegelschnitte aber entspricht nach [204] eine Curve 4. O., welche  $qrs$  zu Doppelpunkten hat. Demnach folgt: Die 27 Punkte  $m$ , in denen die Curve  $u$  von Kegelschnitten berührt wird, die durch  $qrs$  und je einen der Punkte  $ab \dots i$  gehen, haben die Eigenschaft, dass in jedem von ihnen die Curve  $u$  sechspunctig berührt wird von einer Curve 4. O., die  $qrs$  zu Doppelpunkten hat. (Steiner. Crelle 32. pag. 301.)

584. Wenn die Punkte  $qrs$  gegeben sind, so ist dadurch auch die Inflexionsgruppe der Osculationspunkte  $ab \dots i$  bestimmt [580]. Ist aber die letztere durch einen ihrer Punkte,  $a$ , gegeben, so giebt es unendlich viele Punkte, welche die Stelle der  $qrs$  vertreten können. Zieht man nämlich durch zwei dieser Punkte z. B.  $qr$  eine Gerade, schneidet damit die Curve in  $\sigma$ , und zieht durch  $\sigma$  eine beliebige Gerade, die in

$q' r'$  schneidet, so sind  $q' r' s$  wieder drei Punkte, durch die ein in  $a$  osculirender Kegelschnitt gelegt werden kann. (Steiner. Crelle 32. pag. 301.)

Beweis. Ist  $abc$  ein in der Inflexionsgruppe enthaltenes Tripel, so liegen  $abc qrs$  in einem Kegelschnitte [568], daher liegt  $\sigma$  den Punkten  $abcs$  gegenüber, und  $q' r'$  befinden sich mit  $abcs$  in einem Kegelschnitte. Dann aber haben  $q' r' s$  dieselbe Eigenschaft wie  $qrs$  [569].

585. Man kann daher durch Wiederholung dieses Verfahrens nicht allein so viele Punkte  $qrs$  finden, als man will, sondern es können zwei Punkte  $qr$  beliebig angenommen, und dann der zugehörige  $s$  bestimmt werden. Letzteres geschieht noch leichter mit Anwendung des Satzes [232]. Ist nämlich  $a$  und  $qr$  gegeben, so schneide man die Curve mit  $aq$  und  $ar$  in  $x, y$ ; ist dann  $z$  der Punkt, in welchem  $xy$  die Curve trifft, so schneidet  $az$  die Curve in dem gesuchten Punkte  $s$ . (Steiner. Crelle 32. pag. 301.)

586. Man kann sich die Frage vorlegen, ob es unter dem einer Inflexionsgruppe  $ab \dots i$  zugehörigen Systeme von Punkten  $qrs$  auch Tripel geben kann? — Ist  $abc$  ein in der Inflexionsgruppe enthaltenes Tripel, so liegen  $qrs$  mit  $abc$  in einem Kegelschnitte [568]. Wenn daher  $xyz$  ein unter den Punkten  $qrs$  vorkommendes Tripel ist, so müssen diese Punkte der zu  $ab \dots i$  connexen Inflexionsgruppe angehören [577]. Umgekehrt, bilden  $xyz$  ein der connexen Gruppe angehöriges Tripel, so liegen sie mit  $abc$  in einem Kegelschnitt [576], und gehören daher mit zu den Punkten  $qrs$  [569]. Demnach sind die zwölf in der connexen Inflexionsgruppe enthaltenen Tripel die einzigen, die in dem Systeme der  $qrs$  vorkommen.

---

## Dreizehnter Abschnitt.

## Curvenbüschel dritter Ordnung.

## §. 1.

**587.** Ein System von Curven 3. O., welche sich alle in den nämlichen neun Punkten durchschneiden, heisst ein Curvenbüschel 3. O., und die neun gemeinschaftlichen Punkte heissen die Basispunkte des Büschels. Sind  $u = 0$  und  $v = 0$  die Gleichungen von zweien dieser Curven, so lassen sich alle übrigen durch die Gleichung  $u + \lambda v = 0$  darstellen, wenn man der Grösse  $\lambda$  alle möglichen Werthe beilegt. Durch einen beliebigen Punkt, der nicht einer der neun Basispunkte ist, geht nur eine einzige Curve des Büschels [145]; und eine beliebige durch einen Basispunkt gezogene Gerade wird in diesem Basispunkte nur von einer einzigen Curve des Büschels berührt, denn diese ist dann durch einen auf der gegebenen Geraden und unendlich nahe bei dem gegebenen Basispunkte liegenden Punkt vollständig bestimmt.

**588.** Alle Curven 3. O., welche durch acht gegebene Punkte hindurch gehen, bilden einen Büschel, denn sie haben auch noch einen neunten Punkt gemeinschaftlich [219].

**589.** Alle Curven 3. O., welche durch sieben gegebene Punkte hindurch gehen, bilden ein Curvennetz 3. O.

**Beweis** Sind  $u = 0$ ,  $u' = 0$ ,  $u'' = 0$  drei dieser Curven, die keinen weiteren Punkt gemein haben, so stellt die Gleichung

$$(1) \quad u + \lambda u' + \mu u'' = 0$$

für jeden Werth von  $\lambda$  und  $\mu$  eine Curve 3. O. dar, welche ebenfalls durch die gegebenen sieben Punkte geht. Nun ist jede der in Rede stehenden Curven durch zwei weitere passend anzunehmende Punkte bestimmt. Substituirt man die Werthe, welche  $u$ ,  $u'$ ,  $u''$  in diesen beiden Punkten erhalten, in die vorige Gleichung, so ergeben sich zwei Gleichungen, durch welche  $\lambda$  und  $\mu$  so bestimmt werden, dass die Gleichung (1) gerade die betrachtete Curve darstellt. Da demnach jede durch die sieben Punkte gehende Curve 3. O. durch eine

Gleichung von der Form (1) dargestellt werden kann, so bilden alle diese Curven ein Netz [195].

**590.** Bei einem Netze von Curven 3. O., welche sieben Punkte gemeinschaftlich haben, liegen die auf ihnen vorkommenden Doppelpunkte auf einer Curve sechster Ordnung, und jeder Punkt dieser Curve ist ein Doppelpunkt für irgend eine Curve des Netzes.

**Beweis.** Stellt man das Curvennetz nach [589] durch die Gleichung

$$u + \lambda u' + \mu u'' = 0$$

dar, so müssen die Coordinaten  $x_i$  der Doppelpunkte nach [150] den Gleichungen

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial u'}{\partial x_1} + \mu \frac{\partial u''}{\partial x_1} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial u'}{\partial x_2} + \mu \frac{\partial u''}{\partial x_2} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} + \lambda \frac{\partial u'}{\partial x_3} + \mu \frac{\partial u''}{\partial x_3} &= 0 \end{aligned}$$

genügen. Eliminirt man daraus  $\lambda$  und  $\mu$ , so erhält man als geometrischen Ort für die Doppelpunkte die Gleichung

$$(3) \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x_1} & \frac{\partial u'}{\partial x_1} & \frac{\partial u''}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} & \frac{\partial u'}{\partial x_2} & \frac{\partial u''}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} & \frac{\partial u'}{\partial x_3} & \frac{\partial u''}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0,$$

welche eine Curve sechster Ordnung darstellt, da die Elemente dieser Determinante vom zweiten Grade sind. Umgekehrt: genügen die Coordinaten eines Punktes  $x$  dieser Gleichung, so giebt es auch immer ein Werthepaar  $\lambda, \mu$ , für welches die Gleichungen (2) bestehen, d. h. es giebt eine Curve des Netzes, auf welcher  $x$  ein Doppelpunkt ist. (*Salmon* pag. 158.)

**591.** Die sieben gegebenen Punkte befinden sich selbst unter den Doppelpunkten, welche auf den durch sie hindurchgehenden Curven vorkommen, sodass die Curve sechster Ordnung, welche die Doppelpunkte enthält, auch durch die gegebenen sieben Punkte geht.

**Beweis.** Ist  $a$  einer der sieben Punkte, so kann man

eine der Curven des Netzes dadurch bestimmen, dass man verlangt, dass  $a$  für sie ein Doppelpunct sei, und dass sie ausserdem durch die übrigen sechs Punkte geht, denn da alsdann der Doppelpunct  $a$  für drei gegebene Punkte zählt [161], so sind von der zu bestimmenden Curve neun Punkte gegeben. (Salmon pag. 158.)

**592.** Die Curve sechster Ordnung, welche die Doppelpuncte der durch sieben Punkte hindurchgehenden Curven 3. O. enthält, geht nicht bloss durch die sieben Punkte hindurch, sondern hat diese Punkte ebenfalls zu Doppelpuncten und ausserdem in ihnen die Tangenten mit denjenigen Curven 3. O. gemeinschaftlich, welche in diesen Punkten ihre Doppelpuncte besitzen.

**Beweis.** Nimmt man einen der sieben Punkte, welcher  $a$  heissen möge, zur Ecke  $x_1 = 0, x_2 = 0$  des Fundamentaldreiecks, so kann man nach [160] die Gleichungen  $u = 0, u' = 0, u'' = 0$  aus [590] in der Form schreiben:

$$(1) \quad \begin{aligned} u &= v_1 x_3^2 + v_2 x_3 + v_3 = 0 \\ u' &= v'_1 x_3^2 + v'_2 x_3 + v'_3 = 0 \\ u'' &= v''_1 x_3^2 + v''_2 x_3 + v''_3 = 0, \end{aligned}$$

und darin sei

$v_1 = a_1 x_1 + a_2 x_2, v'_1 = a'_1 x_1 + a'_2 x_2, v''_1 = a''_1 x_1 + a''_2 x_2$ . Die Gleichung (3) der Curve 6. O. in [590] wird dann mit Umstellung der Zeilen und Columnen der Determinante

$$\begin{vmatrix} a_1 x_3^2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} x_3 + \dots, & a_2 x_3^2 + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} x_3 + \dots, & 2v_1 x_3 + v_2 \\ a'_1 x_3^2 + \frac{\partial v'_2}{\partial x_1} x_3 + \dots, & a'_2 x_3^2 + \frac{\partial v'_2}{\partial x_2} x_3 + \dots, & 2v'_1 x_3 + v'_2 \\ a''_1 x_3^2 + \frac{\partial v''_2}{\partial x_1} x_3 + \dots, & a''_2 x_3^2 + \frac{\partial v''_2}{\partial x_2} x_3 + \dots, & 2v''_1 x_3 + v''_2 \end{vmatrix} = 0$$

und hat demnach die Form

$$V_1 x_3^5 + V_2 x_3^4 + \dots = 0.$$

Dies bestätigt zunächst, dass diese Curve durch den Punkt  $a$  hindurchgeht [160]. Bildet man aber  $V_1$  und  $V_2$ , so erhält man

$$V_1 = \begin{vmatrix} a_1, & a_2, & 2(a_1 x_1 + a_2 x_2) \\ a'_1, & a'_2, & 2(a'_1 x_1 + a'_2 x_2) \\ a''_1, & a''_2, & 2(a''_1 x_1 + a''_2 x_2) \end{vmatrix},$$

und diese Determinante ist Null, da sie sich in die Summe zweier Determinanten auflösen lässt, von denen jede zwei gleiche Columnen enthält. Mithin hat die Curve 6. O. in  $a$  einen Doppelpunct [160]. Man erhält ferner

$$\begin{aligned} V_2 = & 2a_1 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} v''_1 - \frac{\partial v''_2}{\partial x_2} v_1 \right) + 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} (a'_2 v''_1 - a''_2 v_1) \\ & + 2a'_1 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} v_1 - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} v''_1 \right) + 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} (a''_2 v_1 - a_2 v''_1) \\ & + 2a''_1 \left( \frac{\partial v_2}{\partial x_2} v_1 - \frac{\partial v_2}{\partial x_2} v''_1 \right) + 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} (a_2 v_1 - a'_2 v''_1) \\ & + a_1(a'_2 v''_2 - a''_2 v_2) + a'_1(a''_2 v_2 - a_2 v''_2) + a''_1(a_2 v_2 - a'_2 v''_2) \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} V_2 = & 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} (a'_2 v''_1 - a''_2 v_1) + 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} (a''_1 v'_1 - a'_1 v''_1) \\ & + 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} (a''_2 v_1 - a_2 v''_1) + 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} (a_1 v''_1 - a''_1 v_1) \\ & + 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} (a_2 v_1 - a'_2 v''_1) + 2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} (a'_1 v_1 - a_1 v''_1) \\ & + (a'_1 a''_2 - a''_1 a'_2) v_2 + (a''_1 a_2 - a_1 a''_2) v'_2 + (a_1 a'_2 - a'_1 a_2) v''_2 \end{aligned}$$

Es ist aber

$$\begin{aligned} a'_2 v''_1 - a''_2 v_1 &= a'_2 (a''_1 x_1 + a''_2 x_2) - a''_2 (a'_1 x_1 + a'_2 x_2) \\ &= (a''_1 a'_2 - a'_1 a''_2) x_1 \\ a''_1 v'_1 - a'_1 v''_1 &= a''_1 (a'_1 x_1 + a'_2 x_2) - a'_1 (a''_1 x_1 + a''_2 x_2) \\ &= (a''_1 a'_2 - a'_1 a''_2) x_2, \end{aligned}$$

und ähnlich bei den übrigen. Setzt man also

$$(2) \quad a''_1 a'_2 - a'_1 a''_2 = A, \quad a_1 a''_2 - a''_1 a_2 = A', \quad a'_1 a_2 - a_1 a'_2 = A'',$$

so erhält man

$$\begin{aligned} V_2 = & 2A \left( x_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) + 2A' \left( x_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) \\ & + 2A'' \left( x_1 \frac{\partial v_2}{\partial x_1} + x_2 \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \right) - (Av_2 + A'v'_2 + A''v''_2) \end{aligned}$$

und folglich, da die Grössen  $v_2$  homogene Functionen 2<sup>ten</sup> Grades von  $x_1$  und  $x_2$  sind,

$$V_2 = 3(Av_2 + A'v'_2 + A''v''_2)$$

Nun kann man aber auch der Gleichung  $u + \lambda u' + \mu u'' = 0$  irgend einer Curve 3. O. des Netzes die Form (1) geben, da diese Curve auch durch die Ecke  $a$  des Fundamentaldreiecks geht, nämlich:

$$(v_1 + \lambda v'_1 + \mu v''_1) x_3^2 + (v_2 + \lambda v'_2 + \mu v''_2) x_3 + v_3 + \lambda v'_3 + \mu v''_3 = 0.$$

Wählt man unter diesen Curven diejenige aus, für welche  $\lambda, \mu$  solche Werthe haben, dass

$$(3) \quad 1 : \lambda : \mu = A : A' : A''$$

ist, so erhält man für den Coefficienten von  $x_3^2$

$$Av_1 + A'v'_1 + A''v''_1 = (a_1A + a'_1A' + a''_1A'')x_1 \\ + (a_2A + a'_2A' + a''_2A'')x_2,$$

und dieser Ausdruck ist Null, da beide Glieder desselben wegen der Gleichungen (2) verschwinden. Der Coefficient von  $x_3$  dagegen verwandelt sich in  $\frac{1}{3}V_2$ . Demnach [162] hat diejenige Curve des Netzes, welche durch (3) bestimmt ist, in  $a$  einen Doppelpunct und das Tangentenpaar in diesem mit der Curve 6. O. gemeinschaftlich. Was hierdurch von einem der sieben Punkte bewiesen ist, kann ebenso von jedem der sechs übrigen gezeigt werden. (*Salmon. pag. 159.*)

**593.** Auf den Curven eines Büschels 3. O. giebt es im Allgemeinen zwölf Doppelpuncte.

Beweis 1. Stellt man irgend eine der Curven des Büschels durch die Gleichung

$$u + \lambda v = 0$$

dar, so besteht die Bedingung, dass diese einen Doppelpunct besitzt, in den Gleichungen [150]

$$(1) \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0$$

$$(3) \quad \frac{\partial u}{\partial x_3} + \lambda \frac{\partial v}{\partial x_3} = 0.$$

Die Doppelpuncte, welche auf den Curven des Büschels vorkommen, sind daher diejenigen Punkte, deren Coordinaten diese Gleichungen gleichzeitig befriedigen, während  $\lambda$  zwar veränderlich ist, aber stets in allen drei Gleichungen denselben Werth hat. Diese Gleichungen stellen drei Kegelschnittbüschel dar, nämlich die Büschel der conischen Polaren der Ecken des Fundamentaldreiecks, in Beziehung auf die Curven  $u + \lambda v = 0$  des Büschels 3. O. Nennt man diejenigen Kegelschnitte dieser drei Büschel, welche gleichen Werthen von  $\lambda$  angehören, entsprechende, so kann man auch sagen, die Doppelpuncte sind die Punkte, welche je dreien

entsprechenden Kegelschnitten der drei Büschel gemeinsam sind. Nun erhält man den geometrischen Ort der Durchschnitte der entsprechenden Kegelschnitte der Büschel (1) und (2), wenn man aus diesen Gleichungen  $\lambda$  eliminirt, dieser Ort ist also die Curve 4. O.

$$(4) \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} - \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0,$$

welche durch die Basispunkte der Büschel (1) und (2), nämlich durch die Durchschnitte der Kegelschnittpaare

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0$$

geht. Ebenso ist der geometrische Ort der Durchschnitte entsprechender Kegelschnitte der Büschel (1) und (3) eine zweite Curve 4. O.

$$(5) \quad \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{\partial v}{\partial x_3} - \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial v}{\partial x_1} = 0,$$

welche durch die Basispunkte der Büschel (1) und (3) geht. Diese beiden Curven 4. O. (4) und (5) haben also die Basispunkte des Büschels (1) gemeinsam. Da nun durch jeden Punkt der Curve (4) zwei entsprechende Kegelschnitte der Büschel (1) und (2), und durch jeden Punkt der Curve (5) zwei entsprechende Kegelschnitte der Büschel (1) und (3) gehen, so gehen durch einen Durchschnittspunkt der Curven (4) und (5) drei entsprechende Kegelschnitte aller drei Büschel (1) (2) (3) hindurch. Davon machen aber die Basispunkte des Büschels (1) eine Ausnahme, denn ist  $a$  einer dieser Basispunkte, so entspricht den durch  $a$  gehenden Kegelschnitten der Büschel (2) und (3) nicht derselbe Kegelschnitt des Büschels (1), vielmehr berührt der dem ersteren entsprechende in  $a$  die Curve (4), der dem zweiten entsprechende dagegen die Curve (5) (Vgl. die analoge Betrachtung in [93]). Die Punkte, in denen drei entsprechende Kegelschnitte der drei Büschel sich treffen, d. h. die gesuchten Doppelpunkte, sind demnach die Durchschnitte der Curven (4) und (5) mit Ausnahme der unter diesen befindlichen Basispunkte des Büschels (1). Zieht man übrigens auch noch die dritte Curve 4. O.

$$(6) \quad \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{\partial v}{\partial x_3} - \frac{\partial u}{\partial x_3} \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0$$

hinzu, welche den geometrischen Ort der Durchschnitte ent-



sprechender Kegelschnitte der Büschel (2) und (3) bildet, so müssen die gesuchten Doppelpunkte offenbar auch auf dieser Curve liegen. Diese aber geht im Allgemeinen nicht durch die Basispunkte des Büschels (1). Da nun die Curven (4) und (5) sechszehn Durchschnittspunkte besitzen, von denen die vier Basispunkte des Büschels (1) abzurechnen sind, so bleiben 12 für die Doppelpunkte übrig. (*Salmon* pag. 158. *Cremona* art. 88.)

**Beweis 2.** Bezeichnet man die Basispunkte des Büschels mit 123456789 und betrachtet alle Curven 3. O., welche durch die Punkte 1234567 gehen, so erfüllen die auf diesen vorkommenden Doppelpunkte eine Curve 6. O.  $C_6$  [590]. Ebenso erfüllen die Doppelpunkte, welche auf den Curven 3. O. vorkommen, die durch 1234568 gehen, eine zweite Curve 6. O.  $C'_6$ . Demnach sind die Doppelpunkte derjenigen Curven 3. O., welche beiden Netzen gemeinschaftlich sind, also durch 12345678 und daher auch durch 9 gehen und demnach dem Büschel angehören, Durchschnitte der beiden Curven  $C_6$  und  $C'_6$ . Die Anzahl dieser Durchschnitte beträgt 36. Nun geht aber  $C_6$  durch 1234567 und hat diese Punkte zu Doppelpunkten [592], ebenso geht  $C'_6$  durch 1234568 und hat diese Punkte zu Doppelpunkten. Die beiden Curven  $C_6$  und  $C'_6$  haben also die Punkte 123456 gemeinschaftlich zu Doppelpunkten, sodass in jedem dieser Punkte vier ihrer Durchschnitte vereinigt liegen. Es kann aber keiner dieser Punkte ein Doppelpunkt für eine Curve des Büschels sein, denn wäre etwa 1 ein Doppelpunkt für eine dieser Curven, so würde diese mit einer anderen Curve des Büschels in 1 zwei und ausserdem noch acht andere, im Ganzen also zehn Punkte gemein haben, was nicht möglich ist. Mithin müssen von den 36 Durchschnitten von  $C_6$  und  $C'_6$  die 24 in Abzug gebracht werden, welche sich in den Punkten 123456 befinden, und nur 12 sind Doppelpunkte für die Curven des Büschels. (*Salmon* pag. 159.)

**594.** Die zwölf Doppelpunkte, welche in einem Curvenbüschel 3. O. vorkommen, haben die Eigenschaft, dass ihre geraden Polaren in Bezug auf alle Curven des Büschels die nämlichen geraden Linien sind; und zwar sind diese zwölf Punkte die einzigen, welche diese Eigenschaft haben.

**Beweis.** Wird der Büschel durch die Gleichung  $u + \lambda v = 0$  dargestellt, so haben die geraden Polaren eines Punktes  $x$  in veränderlichen  $y_i$  die Gleichung  $\mathcal{A}_y(u_x) + \lambda \mathcal{A}_y(v_x) = 0$  [267]. Offenbar fallen alle diese den verschiedenen Werthen von  $\lambda$  angehörigen Geraden dann und nur dann in eine zusammen, wenn die Gleichungen

$$\mathcal{A}_y(u_x) = y_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = 0$$

$$\mathcal{A}_y(v_x) = y_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} + y_2 \frac{\partial v}{\partial x_2} + y_3 \frac{\partial v}{\partial x_3} = 0$$

die nämliche Gerade darstellen. Dazu ist erforderlich und hinreichend, dass

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} : \frac{\partial u}{\partial x_2} : \frac{\partial u}{\partial x_3} = \frac{\partial v}{\partial x_1} : \frac{\partial v}{\partial x_2} : \frac{\partial v}{\partial x_3}$$

sei. Diese Gleichungen liefern also die Coordinaten derjenigen Punkte, welche die in Rede stehende Eigenschaft besitzen. Wie man sieht, kommen sie vollständig überein mit den Gleichungen (4), (5) oder auch (1), (2), (3), in [593], welche die Coordinaten der Doppelpunkte lieferten. (*Salmon* pag 157.)

## §. 2.

**595.** Eine besondere Beachtung verdient ein Büschel von Curven 3. O., bei welchem alle Curven folgendes mit einander gemein haben: erstlich drei in gerader Linie liegende Punkte  $a, b, c$ , sodann die Tangenten  $A, B, C$  in diesen und endlich die Tangentialpunkte  $\alpha, \beta, \gamma$  von  $a, b, c$ , welche dann [230] ebenfalls in gerader Linie liegen. Bezeichnet man die Geraden  $a b c$  und  $\alpha \beta \gamma$  resp. mit  $D$  und  $F$ , so kann man den Curvenbüschel nach [245] durch die Gleichung

$$(1) \quad A B C - \lambda^2 D^2 F = 0$$

darstellen, worin  $\lambda^2$  den veränderlichen Parameter bedeutet. Bei einem solchen Curvenbüschel kann man die Anzahl 12 der existirenden Doppelpunkte nicht aufrecht halten; denn eine dieser Curven, nämlich  $D^2 F = 0$  besteht aus drei Geraden, von welchen zwei in  $D$  zusammenfallen. Jeder Punkt der letzteren Geraden ist daher als Doppelpunkt zu betrachten. Es bleibt aber auch für diese Punkte die Eigenschaft [594] bestehen. Nimmt man nämlich die Geraden  $A, B, C$  zu den

Seiten  $x_1 = 0$ ,  $x_2 = 0$ ,  $x_3 = 0$  des Fundamentaldreiecks und setzt

$$D \equiv d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3 \quad F \equiv f_1 x_1 + f_2 x_2 + f_3 x_3,$$

sodass die Gleichung (1) übergeht in

$$u = x_1 x_2 x_3 - \lambda^2 D^2 F = 0,$$

so erhält man

$$(2) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x_1} &= x_2 x_3 - \lambda^2 D (f_1 D + 2 d_1 F) \\ \frac{\partial u}{\partial x_2} &= x_3 x_1 - \lambda^2 D (f_2 D + 2 d_2 F) \\ \frac{\partial u}{\partial x_3} &= x_1 x_2 - \lambda^2 D (f_3 D + 2 d_3 F) \end{aligned}$$

und damit wird die gerade Polare eines Punctes  $x$ , der auf  $D$  liegt, für den also  $D = 0$  ist, in veränderlichen  $y_i$

$$x_2 x_3 y_1 + x_3 x_1 y_2 + x_1 x_2 y_3 = 0.$$

Diese ist also für alle Curven des Büschels dieselbe und zwar nach [290] die gerade Polare des Punctes  $x$  in Bezug auf das Dreieck  $ABC$ , welches ebenfalls eine Curve unseres Büschels ist. Zieht man nun die Puncte der Geraden  $D$  nicht in Betracht, so treten zuerst als Doppelpuncte die drei Durchschnitte der Geraden  $A$ ,  $B$ ,  $C$  auf. Ausserdem aber existiren, wie sich sogleich ergeben wird, noch drei Doppelpuncte auf den Curven des Büschels.

**596.** Um diese Doppelpuncte zu finden, wenden wir das in [593. Bew. 1] angegebene Verfahren an und haben dann diejenigen Puncte zu suchen, für welche die Ausdrücke (2) in [595] gleichzeitig verschwinden, und daher die Grösse  $\lambda^2$  aus je zweien dieser Gleichungen zu eliminiren. Das giebt die drei Gleichungen

$$D x_1 [x_2 (f_2 D + 2 d_2 F) - x_3 (f_3 D + 2 d_3 F)] = 0$$

$$D x_2 [x_3 (f_3 D + 2 d_3 F) - x_1 (f_1 D + 2 d_1 F)] = 0$$

$$D x_3 [x_1 (f_1 D + 2 d_1 F) - x_2 (f_2 D + 2 d_2 F)] = 0,$$

welche die drei Curven 4. O. (4), (5), (6) in [593] darstellen, deren gemeinschaftliche Puncte die Doppelpuncte sind. Aber von diesen Curven besteht jede aus zwei Geraden und einem Kegelschnitt, and zwar haben sie alle drei die Gerade  $D$  gemeinschaftlich, wodurch sich bestätigt, dass alle Puncte der-

selben als Doppelpunkte betrachtet werden können. Sodann befinden sich unter ihren gemeinschaftlichen Punkten die Ecken

$$\begin{pmatrix} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{pmatrix}.$$

des Fundamentaldreiecks, also die Durchschnitte der drei Tangenten  $A, B, C$ . Lässt man nun die Factoren  $Dx_1, Dx_2, Dx_3$  fort, so kann man die übrig bleibenden Kegelschnitte schreiben

$$D(f_2x_2 - f_3x_3) + 2F(d_2x_2 - d_3x_3) = 0$$

$$D(f_3x_3 - f_1x_1) + 2F(d_3x_3 - d_1x_1) = 0$$

$$D(f_1x_1 - f_2x_2) + 2F(d_1x_1 - d_2x_2) = 0,$$

und diese schneiden sich in denselben vier Punkten, denn die Summe dieser Gleichungen ist identisch Null,\* und daher liegen die Punkte, in denen sich die beiden ersten Kegelschnitte schneiden, auch auf dem dritten. Unter diesen vier Punkten aber befindet sich auch der Durchschnitt  $(D, F)$  und dieser liegt auf der Geraden  $D$ . Ausserdem trifft diese Gerade die drei Kegelschnitte in drei verschiedenen Punkten. Daher haben die letzteren noch drei Punkte gemeinschaftlich, die nicht auf  $D$  liegen. Demnach ergibt sich, dass der in [595] angegebene Curvenbüschel ausser den Punkten der Geraden  $D$  und den Durchschnitten der drei Tangenten  $A, B, C$  drei Doppelpunkte besitzt.

597. Legt man aus einem der drei Punkte  $\alpha, \beta, \gamma$  [595], z. B. aus  $\gamma$ , alle Tangenten an alle Curven des Büschels, so ist eine dieser Tangenten, nämlich  $C$ , allen Curven gemeinschaftlich; die Berührungspunkte der übrigen aber liegen auf einem Kegelschnitt, welcher durch den Durchschnitt der Tangenten  $A$  und  $B$ , und ausserdem durch die Punkte  $a, b$  und  $\gamma$  geht. Auf demselben Kegelschnitt liegen auch die Doppelpunkte des Büschels.

Beweis. Greift man irgend eine Curve des Büschels heraus, so ist jede der drei Tangenten, welche ausser  $C$  aus  $\gamma$  an diese Curve gezogen werden können, nach [246] zugleich Tangente an einem Kegelschnitt, welche  $A$  und  $B$  in resp.  $a$  und  $b$  berührt, und zwar ist der Berührungspunkt der Curve

zugleich der des Kegelschnittes. Hat die Curve einen Doppelpunct  $d$ , so hat die Gerade, welche  $\gamma$  mit diesem verbindet, nach [246] dieselbe Eigenschaft, denn die Gerade  $\gamma d$  schneidet dann die Curve in  $d$  in zwei zusammenfallenden Puncten. Demnach sind die Berührungspuncte der aus  $\gamma$  an die Curven des Büschels gehenden Tangenten (mit Ausnahme von  $C$ ) und die Doppelpuncte zugleich die Berührungspuncte der Tangenten aus  $\gamma$  an die Kegelschnitte eines Büschels, welche  $A$  und  $B$  in den Puncten  $a$  und  $b$  berühren. Demnach [132] liegen diese Berührungspuncte und die Doppelpuncte auf einem Kegelschnitte, der die oben erwähnte Eigenschaft hat. (*Salmon* pag. 160.)

598. Hieraus folgt, dass die drei Doppelpuncte des in Rede stehenden Büschels 3. O. auf drei Kegelschnitten liegen, welche durch folgende Puncte gehen:

der erste durch  $(A, B), a, b, \gamma$   
 „ zweite „  $(B, C), b, c, \alpha$   
 „ dritte „  $(C, A), c, a, \beta$ .

Nimmt man die Geraden  $A, B, C$  zu Seiten des Fundamental-dreieckes und bezeichnet mit  $A_\alpha$ , etc. die Coordinaten der Puncte  $\alpha$ , etc., sowie mit  $D_\alpha$  etc. das Resultat der Substitution dieser Coordinaten in die lineare Function  $D$ , so sind nach [132] die Gleichungen dieser drei Kegelschnitte folgende:

$$\frac{A_\gamma}{A} + \frac{B_\gamma}{B} - 2 \frac{D_\gamma}{D} = 0$$

$$\frac{B_\alpha}{B} + \frac{C_\alpha}{C} - 2 \frac{D_\alpha}{D} = 0$$

$$\frac{C_\beta}{C} + \frac{A_\beta}{A} - 2 \frac{D_\beta}{D} = 0.$$

599. Die drei Doppelpuncte liegen ferner auf einem Kegelschnitte, welcher dem Dreieck  $ABC$  umschrieben ist, nämlich auf der conischen Polare des Punctes  $(D, F)$  in Beziehung auf dieses Dreieck [296].

Beweis. Die gerade Polare eines Doppelpunctes ist in Bezug auf alle Curven des Büschels dieselbe Gerade [594]. Zwei Curven dieses Büschels sind  $ABC = 0$  und  $D^2 F = 0$ , in Beziehung auf die letztere aber geht die gerade Polare jedes Punctes durch  $(D, F)$  [290]. Daher gehen die geraden

Polaren der drei Doppelpuncte in Beziehung auf das Dreieit  $ABC$  durch  $(D, F)$ , und folglich geht die conische Polare von  $(D, F)$  in Beziehung auf  $ABC$  durch die drei Doppelpuncte [273]. (*Salmon* pag. 159.)

**600.** Die Poloconik der Geraden  $D$  ist in Bezug auf alle Curven des Büschels derselbe Kegelschnitt.

**Beweis.** Die gerade Polare irgend eines Punctes der Geraden  $D$  in Bezug auf das von den Tangenten  $A, B, C$  gebildete Dreieck ist nach [595] zugleich die gerade Polare desselben Punctes in Bezug auf jede Curve unseres Büschels. Die Poloconik der Geraden  $D$ , als die Einhüllende aller dieser geraden Polaren [311] bleibt daher auch für alle Curven des Büschels dieselbe.

**601.** Die Verbindungslinie zweier Doppelpuncte des Büschels ist die Polare des dritten Doppelpunctes in Beziehung auf die Poloconik der Geraden  $D$ . Oder: Sind  $o, o', o''$  die drei Doppelpuncte, so ist das Dreieck  $o o' o''$  der Poloconik von  $D$  conjugirt [108].

**Beweis.** Wir betrachten hier die Doppelpuncte als die Durchschnitte zweier der drei in [598] angegebenen Kegelschnitte, z. B. der beiden ersten, deren Gleichungen sind

$$(1) \quad \begin{aligned} \frac{A_\gamma}{A} + \frac{B_\gamma}{B} - 2 \frac{D_\gamma}{D} &= 0 \\ \frac{B_\alpha}{B} + \frac{C_\alpha}{C} - 2 \frac{D_\alpha}{D} &= 0. \end{aligned}$$

Diese haben, wie aus [598] zu ersehen ist, den Punct  $b$ , d. i.  $(B, D)$  gemeinschaftlich und ihre drei anderen Durchschnittspuncte sind die Doppelpuncte  $o, o', o''$ . Wir wählen nun die Gleichungen der Fundamentalseiten  $A=0, B=0, C=0$  in einer solchen Form, dass in Beziehung auf sie die Coordinaten eines der drei Doppelpuncte, z. B.  $o$ , die Verhältnisse

$$A : B : C = 1 : 1 : 1$$

erhalten. Das ist immer möglich, denn wären etwa  $a_1 : a_2 : a_3$  die Coordinaten von  $o$ , so dürfte man die Gleichungen der Fundamentallinien nur in der Form  $\frac{A}{a_1} = 0, \frac{B}{a_2} = 0, \frac{C}{a_3} = 0$  annehmen, um in Beziehung auf diese neuen linearen Func-

tionen für die Coordinaten von  $o$  die obigen Werthe zu erhalten. So genommen sei dann

$$(2) \quad D \equiv d_1 A + d_2 B + d_3 C.$$

Es kommt nun zunächst darauf an, die Coordinaten der Punkte  $\gamma$  und  $\alpha$  zu bestimmen, um diese in die Gleichungen (1) einsetzen zu können. Zu diesem Ende bemerke man, dass die Gerade  $\gamma o$  nach [597] in  $o$  einen Kegelschnitt berührt, welcher  $A$  und  $B$  zu Tangenten und  $D$  zur Berührungssehne hat, dessen Gleichung also in der Form

$$AB = k^2 D^2$$

geschrieben werden kann. Bestimmt man nach [131] einen Punkt dieses Kegelschnitts durch einen Parameter  $\mu$ , so ist für diesen Punkt nach (2) in [131]

$$(3) \quad \mu^2 = \frac{B}{A} \quad \mu k = \frac{B}{D},$$

und die Tangente in diesem Punkte hat nach (3) die Gleichung

$$(4) \quad \mu^2 A + B - 2\mu k D = 0.$$

Nimmt man nun den Punkt  $o$  als denjenigen an, dem die Zahl  $\mu$  zugehört, so ist für diesen nach der obigen Annahme

$$A = 1, B = 1, C = 1 \text{ und daher } D = d_1 + d_2 + d_3$$

zu setzen. Für  $o$  wird also aus (3)

$$\mu^2 = 1 \quad \mu k = \frac{1}{d_1 + d_2 + d_3}$$

und damit die Gleichung der Tangente in  $o$  aus (4) in Verbindung mit (2)

$$(d_1 + d_2 + d_3)(A + B) - 2(d_1 A + d_2 B + d_3 C) = 0.$$

Setzt man darin der Kürze wegen

$$d_1 + d_2 + d_3 = 2\delta,$$

so nimmt diese Gleichung die Form

$$(\delta - d_1)A + (\delta - d_2)B - d_3 C = 0$$

an. Dies ist nun die Gleichung der Geraden  $\gamma o$ , und daher  $\gamma$  ihr Durchschnitt mit der Geraden  $C = 0$ . Setzt man aber  $C = 0$ , so folgt

$$A : B = (\delta - d_2) : -(\delta - d_1),$$

und daher sind die Coordinaten des Punktes  $\gamma$

$$A_\gamma = \delta - d_2, \quad B_\gamma = -(\delta - d_1), \quad C_\gamma = 0,$$

und damit erhält man aus (2)

$$D_\gamma = d_1 (\delta - d_2) - d_2 (\delta - d_1) = \delta (d_1 - d_2).$$

Ganz ebenso ermittelt man auch die Werthe von  $B_\alpha, C_\alpha, D_\alpha$  durch Betrachtung der Geraden  $\alpha o$ , welche in  $o$  einen Kegelschnitt berührt, der  $B$  und  $C$  zu Tangenten, und  $D$  zur Berührungssehne hat. Statt der Gleichungen (3) und (4) treten daher die Folgenden auf

$$\mu^2 = \frac{C}{B} \quad \mu k = \frac{C}{D}$$

$$\mu^2 B + C - 2\mu k D = 0,$$

welche durch Einsetzen der Coordinaten des Punctes  $o$ , nämlich  $A = 1, B = 1, C = 1$

$$\mu^2 = 1 \quad \mu k = \frac{1}{d_1 + d_2 + d_3}$$

und dann für die Gerade  $\alpha o$  die Gleichung

$$-d_1 A + (\delta - d_2) B + (\delta - d_3) C = 0$$

liefern. Da dann  $\alpha$  der Durchschnitt von  $\alpha o$  mit  $A = 0$  ist, so ergibt sich

$$A_\alpha = 0, \quad B_\alpha = \delta - d_3, \quad C_\alpha = -(\delta - d_2)$$

und

$$D_\alpha = d_2 (\delta - d_3) - d_3 (\delta - d_2) = \delta (d_2 - d_3).$$

Mit diesen Werthen werden nun die Gleichungen (1) der beiden zu untersuchenden Kegelschnitte

$$(5) \quad \begin{aligned} \frac{\delta - d_2}{A} - \frac{\delta - d_1}{B} - \frac{2\delta(d_1 - d_2)}{D} &= 0 \\ \frac{\delta - d_3}{B} - \frac{\delta - d_2}{C} - \frac{2\delta(d_2 - d_3)}{D} &= 0. \end{aligned}$$

Es kommt nun darauf an, durch Combination dieser Gleichungen eine neue Gleichung zu erhalten, welche zwei durch die vier Durchschnitte  $b, o, o', o''$  der beiden Kegelschnitte gehende Gerade darstellt, und zwar  $bo$  und  $o'o''$ . Zu dem Ende werden die Gleichungen umgeformt. Schafft man bei der ersten die Nenner fort und kehrt die Zeichen um, so erhält man

$$[(\delta - d_1) A - (\delta - d_2) B] D + 2\delta(d_1 - d_2) A \cdot B = 0,$$

und wenn man den identisch verschwindenden Ausdruck

$$[(\delta - d_1) A - (\delta - d_2) B](-2\delta \cdot B) + [(\delta - d_1) A - (\delta - d_2) B] 2\delta B$$



hinzufügt

$$(6) [(\delta - d_1)A - (\delta - d_2)B](D - 2\delta B) + 2\delta B(\delta - d_2)(A - B) = 0.$$

Verfährt man ebenso mit der zweiten Gleichung (5) und fügt den verschwindenden Ausdruck

$$[(\delta - d_3)C - (\delta - d_2)B](-2\delta B) + [(\delta - d_3)C - (\delta - d_2)B]2\delta B$$

hinzu, so ergibt sich

$$(7) [(\delta - d_3)C - (\delta - d_2)B](D - 2\delta B) + 2\delta B(\delta - d_2)(C - B) = 0.$$

Multiplicirt man nun die Gleichung (6) mit  $d_1$ , und (7) mit  $d_3$ , addirt und bemerkt, dass

$$d_1(A - B) + d_3(C - B) = D - 2\delta B$$

ist, so wird  $D - 2\delta B$  Factor, und man erhält

$$(D - 2\delta B)[d_1(\delta - d_1)A + d_2(\delta - d_2)B + d_3(\delta - d_3)C] = 0.$$

Diese Gleichung stellt daher zwei durch die vier Punkte  $b, o, o', o''$  gehende Gerade dar. Von diesen geht die erste nämlich  $D - 2\delta B = 0$  durch  $b = (B, D)$  und durch  $o$ , da ihr durch die Coordinaten dieses Punctes, nämlich  $B = 1, D = 2\delta$ , genügt wird, und folglich ist die andere

$$d_1(\delta - d_1)A + d_2(\delta - d_2)B + d_3(\delta - d_3)C = 0$$

die Gleichung der Geraden  $o'o''$ .

Nun wird andererseits nach [318] die Polconik der Geraden  $D$  ausgedrückt durch die Gleichung

$$\Pi = \sqrt{d_1 A} + \sqrt{d_2 B} + \sqrt{d_3 C} = 0$$

oder entwickelt [103]

$$\Pi = d_1^2 A^2 + d_2^2 B^2 + d_3^2 C^2 - 2d_2 d_3 BC - 2d_3 d_1 CA - 2d_1 d_2 AB = 0.$$

Daraus erhält man

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial A} = d_1(d_1 A - d_2 B - d_3 C), \quad \frac{1}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial B} = d_2(-d_1 A + d_2 B - d_3 C)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \Pi}{\partial C} = d_3(-d_1 A - d_2 B + d_3 C),$$

und diese Ausdrücke nehmen im Puncte  $o$ , d. h. für  $A = B = C = 1$  die Werthe

$$-2d_1(\delta - d_1), \quad -2d_2(\delta - d_2), \quad -2d_3(\delta - d_3)$$

an. Daher erhält man für die Polare von  $o$  in Beziehung auf  $\Pi$  die Gleichung

$$d_1(\delta - d_1)A + d_2(\delta - d_2)B + d_3(\delta - d_3)C = 0,$$

also wiederum die Gerade  $o'o''$ . (Salmon pag. 163.)

**602.** Zieht man eine Gerade  $T$  durch einen der Tangentialpunkte  $\alpha, \beta, \gamma$ , z. B.  $\gamma$ , und einen der drei Doppelpunkte  $o, o', o''$  z. B. durch  $o$ , und schneidet mit ihr die Gerade  $D$  in  $d$  und irgend eine Curve des Büschels in  $n$  und  $p$ , so sind die letzteren Punkte allemal einander harmonisch zugeordnet in Bezug auf  $o$  und  $d$ . Die Durchschnitte  $n, p$  der Geraden  $T$  mit den Curven des Büschels sind conjugirte Punktepaare einer Involution.

**Beweis.** Die Punkte  $n, p$  liegen nach [245] auf einem Kegelschnitte desjenigen Kegelschnittbüschels, welcher die Geraden  $A$  und  $B$  in  $a$  und  $b$  berührt, also  $D$  zur Beführungssehne hat. Die Gerade  $o\gamma$  aber berührt nach [597] in  $o$  einen Kegelschnitt desselben Büschels. Da nun die Gerade  $D$  doppelt gezählt, ebenfalls einen Kegelschnitt dieses Büschels bildet, so sind  $o$  und  $d$  die Doppelpunkte der durch den Kegelschnittbüschel auf der Geraden  $\gamma o$  erzeugten Involution, und daher sind  $n$  und  $p$  einander harmonisch zugeordnet in Bezug auf  $o$  und  $d$ .

**Bemerkung.** Dass in der That der Punkt  $d$  als der zweite Doppelpunkt der Involution, d. h. [118] als der zweite Berührungspunkt der Geraden  $\gamma o$  mit einem Kegelschnitte des Büschels zu betrachten ist, geht darats hervor, dass die Berührungspunkte der aus  $\gamma$  an die Kegelschnitte des Büschels gelegten Tangenten nach [132] auf einem Kegelschnitte liegen, welcher durch  $\gamma$  geht. Denn gäbe es (ausser der doppelt gezählten Geraden  $D$ ) noch einen zweiten Kegelschnitt, welcher die Gerade  $\gamma o$  berührt, so müsste der Berührungspunkt auch auf jenem durch  $\gamma$  gehenden Kegelschnitte liegen, und dieser daher die Gerade  $\gamma o$  in drei Punkten, nämlich in  $o$ , in  $\gamma$  und in dem neuen Berührungspunkte treffen, was nicht möglich ist.

**603.** Lässt man die Gerade  $D$ , welche die Berührungspunkte  $a, b, c$  verbindet, ins Unendliche rücken, so gehen die Tangenten  $A, B, C$  in Asymptoten über, und die Tangentialpunkte  $\alpha, \beta, \gamma$  verwandeln sich in die Asymptotendurchschnitte. Aus [596] folgt alsdann: Auf den Curven 3. O., welche die Asymptoten gemeinschaftlich haben und diese in denselben Punkten schneiden, giebt es drei Doppelpunkte  $o, o', o''$ .

**604.** Beachtet man ferner, dass die Poloconik der unendlich fernen Geraden nach [319] der Kegelschnitt ist, welcher die Seiten des von den Asymptoten gebildeten Dreiecks in deren Mitten berührt, so folgt aus [601]: Die Gerade, welche zwei Doppelpuncte eines Büschels von Curven 3. O., die die nämlichen Asymptoten haben und diese in den nämlichen Punkten schneiden, verbindet, ist die Polare des dritten Doppelpunctes in Beziehung auf den Kegelschnitt, welcher die Seiten des Asymptotendreiecks in deren Mitten berührt; die drei Doppelpuncte bilden daher ein dem genannten Kegelschnitte conjugirtes Dreieck [108]. (*Plücker. System der anal. Geom. pag. 193.*)

**605.** Ferner folgt aus [602], da nun auch  $d$  ins Unendliche rückt, und daher  $o$  in die Mitte von  $n$  und  $p$  fällt: Wenn man bei einem Büschel von Curven 3. O., welche die nämlichen Asymptoten haben und diese in den nämlichen Punkten schneiden, einen der Asymptotendurchschnitte mit einem der Doppelpuncte durch eine Gerade  $T$  verbindet, so liegt der Doppelpunct in der Mitte der beiden Punkte, in denen  $T$  irgend eine Curve des Büschels schneidet. Aus diesem Grunde hat *Plücker* die Doppelpuncte die Mittelpuncte der Curven des Büschels genannt. (*Plücker. System der anal. Geom. pag. 180.*)

**606.** Fallen zwei der drei Doppelpuncte  $o\ o'\ o''$  zusammen, z. B.  $o'$  mit  $o$ , so ist dieser Punct ein Rückkehrpunct. — Denn da  $o'o''$  die Polare von  $o$  in Beziehung auf den in [604] erwähnten Kegelschnitt ist, und diese nun durch  $o$  hindurch geht, so liegt  $o$  auf diesem Kegelschnitt selbst und ist daher nach [326] ein Rückkehrpunct. (*Salmon pag. 164.*)

### §. 3.

**607.** Werden die Curven eines Büschels 3. O. von einer Transversale geschnitten, so bilden auf derselben die Punctgruppen, deren drei Punkte jedesmal der nämlichen Curve angehören, eine cubische Involution. — Denn bezieht man die Gleichung des Büschels  $u + \lambda v = 0$  auf Parallelcoordinaten,  $x, y$ , deren Abscissenaxe mit der gegebenen Transversale zusammenfällt, so erhält man, wenn man  $y = 0$  setzt, für

die Abscissen der Durchschnitte der Transversale mit den Curven eine Gleichung von der Form (1) in [50]. (*Cremona* art. 49.)

**608.** Unter den Curven eines Büschels 3. O. giebt es vier, welche eine beliebig gegebene Gerade  $G$  berühren. Geht die letztere zufällig durch einen Doppelpunct, so zählt dieser für einen Berührungspunct.

**Beweis.** Auf der cubischen Involution, welche durch den Büschel auf der Geraden  $G$  erzeugt wird [607], giebt es vier Doppelpuncte [50]; in einem solchen fallen zwei Punkte einer Gruppe zusammen, also auch zwei Durchschnitte einer Curve mit der Geraden  $G$ . Daher berührt diese die Curve oder trifft sie in einem Doppelpuncte. (*Cremona* art. 49.)

**609.** Geht die Gerade  $G$  durch einen Basispunct des Büschels, so hat eine die Gerade berührende Curve ihren Berührungspunct in dem Basispuncte [587], und ausserdem giebt es nur noch zwei Curven, welche diese Gerade berühren. — Aus [51], denn in diesem Falle fällt von jeder Gruppe der Involution ein Punct in den Basispunct.

**610.** Ist ein Basispunct für eine der Curven des Büschels ein Wendepunct, und die Gerade  $G$  in diesem die Wendetangente dieser Curve, so giebt es ausser der letzteren nur noch eine Curve des Büschels, welche diese Wendetangente berührt. — Denn es tritt alsdann der in [52] betrachtete Fall ein.

**611.** Wenn von den Basispuncten eines Curvenbüschels 3. O. zwei in einen  $a$  zusammenfallen, so giebt es unter den Curven des Büschels eine, welche in  $a$  einen Doppelpunct, und eine, welche in  $a$  einen Wendepunct hat. Alle mit Ausnahme der ersten haben in  $a$  eine gemeinschaftliche Tangente  $A$ .

**Beweis.** Zunächst ist klar, dass wenn eine Curve des Büschels in  $a$  einen Doppelpunct hat, diese die den anderen gemeinschaftliche Tangente  $A$  nicht berühren kann, denn dann hätte diese Curve mit einer anderen in  $a$  drei und ausserdem noch sieben Punkte gemeinschaftlich, was nicht möglich ist, da zwei Curven 3. O. nur neun Punkte mit einander gemein haben können. Aus demselben Grunde kann es auch nicht mehr als eine Curve mit einem Doppelpuncte in  $a$  geben.

Denkt man sich nun durch  $a$  eine von  $A$  verschiedene Gerade  $B$  gezogen, und bestimmt eine Curve des Büschels durch die Annahme eines auf  $B$  und unendlich nahe bei  $a$  liegenden Punctes, so wird diese Curve in  $a$  sowohl von  $A$ , als auch von  $B$  in zwei zusammenfallenden Puncten getroffen, und folglich ist  $a$  für diese Curve ein Doppelpunct. Nimmt man ferner auf der Geraden  $A$  selbst einen bei  $a$  unendlich nahen Punct an, so bestimmt dieser eine Curve, welche in  $a$  drei zusammenfallende Puncte mit  $A$  gemein hat, und welche daher in  $a$  einen Wendepunct besitzt, da  $A$  nicht Tangente in einem Doppelpuncte sein kann. (*Cremona* art. 47.)

#### §. 4.

**612.** In einem syzygetischen Curvenbüschel 3. O., d. h. [355] einem solchen, deren Curven sich in ihren gemeinschaftlichen Wendepuncten durchschneiden, giebt es vier Curven, welche aus drei Geraden bestehen. Diese heissen syzygetische Dreiseite.

Beweis. Nach [353] gehen durch die Wendepuncte einer Curve 3. O. und daher auch durch die Basispuncte eines syzygetischen Büschels zwölf Gerade, welche sich der Art in vier Gruppen zu je dreien theilen, dass die drei Geraden jeder Gruppe alle Wendepuncte enthalten. Diese vier Gruppen bilden daher vier syzygetische Dreiseite. Da diese vier Curven aber zwölf Doppelpuncte enthalten, nämlich jedes Dreiseit die drei Durchschnitte ihrer drei Geraden, so können in dem Büschel keine weiteren Doppelpuncte [593] und daher auch keine weiteren Dreiseite vorkommen. (*Cremona* art. 140. b.)

**613.** Hieraus folgt: In einem Büschel syzygetischer Curven 3. O. giebt es ausser den vier Dreiseiten keine Curve mit einem Doppelpunct. (*Cremona* art. 140. b.)

**614.** Jede Seite  $R$  eines syzygetischen Dreiseits, also jede Gerade, welche drei Wendepuncte enthält, ist die gemeinschaftliche gerade Polare der gegenüberliegenden Ecke  $r$ , in welcher nach [365] die harmonischen Polaren der betreffenden drei Wendepuncte sich schneiden, in Bezug auf alle Curven des syzygetischen Büschels.

Beweis, Die conische Polare eines Wendepuncts besteht

aus der Wendetangente und der harmonischen Polare. Letztere geht durch  $r$  und ist gemeinschaftlich für alle Curven des Büschels [356]. Da demnach die conischen Polaren der drei in Rede stehenden Wendepuncte in Bezug auf alle Curven des Büschels durch  $r$  gehen, so gehen nach [273] die geraden Polaren von  $r$  in Bezug auf alle Curven des Büschels durch die drei Wendepuncte und fallen daher mit der Geraden  $R$  zusammen. (*Cremona art. 142.*)

615. Nach [366] hat man jetzt: Die zwölf Ecken der vier syzygetischen Dreiseite sind die Puncte, in welchen sich die neun harmonischen Polaren der Wendepuncte zu je drei treffen. Auf jeder harmonischen Polare liegen vier dieser Ecken. (*Hesse. Eigenschaften der Wendepuncte etc. Crelle'se Journ. Bd. 38. pag. 259. 261. Cremona art. 142.*)

616. Sind  $w_1 w_2 w_3$  die auf einer Seite  $R$  eines syzygetischen Dreiseits liegenden Wendepuncte,  $W_1 W_2 W_3$  deren harmonische Polaren, die sich [365] in der der Seite  $R$  gegenüberliegenden Ecke  $r$  treffen, und zieht man aus  $r$  die sechs Tangenten an irgend eine Curve des Büschels, so liegen die sechs Berührungspuncte auf drei Mal drei Geraden, von denen je drei durch einen der Wendepuncte  $w_1 w_2 w_3$  gehen. — (Aus [369], da  $r$  auf jeder der drei harmonischen Polaren  $W_1, W_2, W_3$  liegt.) Und die sechs Tangenten sind auf drei verschiedene Arten in Involution, indem jedesmal diejenigen zwei Tangenten conjugirte Strahlen bilden, deren Berührungspuncte mit demselben Wendepuncte in gerader Linie liegen. Die Doppelstrahlen der drei Involutionen sind:  $W_1$  und  $rw_1$ ,  $W_2$  und  $rw_2$ ,  $W_3$  und  $rw_3$ . — Aus [370].

617. Zieht man aus einem auf der harmonischen Polare  $W$  eines Wendepunctes  $w$  liegenden Puncte  $m$  an alle Curven des syzygetischen Büschels Tangentenpaare der Art, dass die Berührungspuncte mit  $w$  in gerader Linie liegen [369], so bilden diese Tangentenpaare conjugirte Strahlenpaare einer Involution, deren Doppelstrahlen  $W$  und  $mw$  sind. — Denn jedes Tangentenpaar ist harmonisch zugeordnet in Bezug auf  $W$  und  $mw$  [370].

618. Ist  $r r_1 r_2$  ein syzygetisches Dreiseit,  $w$  ein auf  $r_1 r_2$  liegender Wendepunct, und  $W$  dessen harmonische Polare,

so sind  $W$  und  $rw$  einander harmonisch zugeordnet in Bezug auf  $rr_1$  und  $rr_2$ .

Beweis. Da  $w$  auf  $r_1 r_2$  liegt, so besteht die conische Polare von  $w$  in Beziehung auf das Dreieck  $r r_1 r_2$  nach [296] aus der Geraden  $r_1 r_2$  und einer zweiten durch  $r$  gehenden Geraden, die in Bezug auf  $rr_1$  und  $rr_2$  harmonisch zugeordnet ist zu  $rw$ . Ist aber  $w$  ein Wendepunkt, so ist diese zweite Gerade die harmonische Polare  $W$ . (Hesse l. c. [615] pag. 261.)

619. Sind demnach  $w_1 w_2 w_3$  die drei auf  $r_1 r_2$  liegenden Wendepunkte, und  $W_1 W_2 W_3$  deren harmonische Polaren, so sind  $W_1, rw_1$ ;  $W_2, rw_2$ ;  $W_3, rw_3$  conjugirte Strahlenpaare einer Involution, deren Doppelstrahlen  $rr_1$  und  $rr_2$  sind. — [67, 45.]

620. Jede durch einen Wendepunkt  $w$  eines syzygetischen Büschels gezogene Gerade  $G$  berührt eine Curve des Büschels in  $w$  als Wendetangente und eine andere einfach in einem anderen Punkte. — Denn erstlich ist durch die Gerade  $G$  als Tangente in  $w$  nach [587] eine hier berührende Curve des Büschels bestimmt. Da aber diese, wie alle Curven des Büschels, in  $w$  einen Wendepunkt hat, so ist  $G$  die Wendetangente an dieser, und wird daher nach [610] nur noch von einer Curve des Büschels berührt. Das Letztere folgt auch daraus, dass der Berührungspunkt jeder von  $w$  an irgend eine Curve des Büschels gelegten Tangente auf der für alle Curven gemeinschaftlichen harmonischen Polare von  $w$  liegen muss; diese aber schneidet die Gerade  $G$  nur in einem Punkte.

621. Wenn bei einem syzygetischen Büschel eine durch einen Wendepunkt  $w$  gezogene Gerade eine Curve  $u$  des Büschels in  $w$  als Wendetangente und eine andere Curve  $v$  des Büschels einfach in  $m$  berührt, so kann allemal  $u$  als Fundamentalcurve und  $v$  als deren Hesse'sche Curve betrachtet werden.

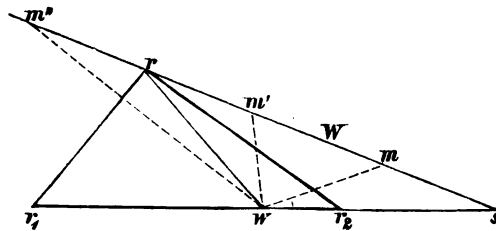
Beweis. Zu jeder Curve 3. O.  $u$  gehört eine Hesse'sche Curve, welche mit jener syzygetisch ist und die Eigenschaft hat, dass [463] die in einem Wendepunkte an  $u$  gezogene Wendetangente die Hesse'sche Curve berührt. Es giebt aber [620] ausser  $u$  nur eine Curve  $v$  des syzygetischen Büschels,

welche die Wendetangente berührt, also muss diese die Hesse'sche Curve von  $u$  sein.

622. (Ergänzung zu [483]). Jede Curve  $v$  eines syzygetischen Büschels kann als Hesse'sche Curve für drei Curven des Büschels als Fundamentalcurven betrachtet werden, und diese drei sind immer von einander verschieden, wenn die gegebene Curve  $v$  nicht ein Dreiseit ist.

Beweis. (Fig. 43.) Durch einen Wendepunct  $w$  des syzygetischen Büschels gehen drei Gerade  $wm, wm', wm''$ , welche die gegebene Curve  $v$  berühren (die Punkte  $mm'm''$  sind dann zugleich die Durchschnitte von  $v$  mit der harmonischen Polare  $W$  von  $w$  [280]), und von diesen fallen keine zwei zusammen, wenn  $v$  nicht ein Dreiseit ist. Diese drei Geraden sind zugleich Wendetangenten in  $w$  für drei von einander verschiedene andere Curven  $u, u', u''$  des Büschels [587]; jede der Letzteren kann daher als Fundamentalcurve zu  $v$  als einer Hesse'schen Curve betrachtet werden [621]. (Cremona art. 143.)

Fig. 43.



623. Wird ein syzygetisches Dreiseit als eine Hesse'sche Curve betrachtet, so gehört ihr als Fundamentalcurve erstlich dasselbe Dreiseit an [340], und dann noch eine andere Curve des Büschels. Diese ist dadurch bestimmt, dass ihre Wendetangente in einem auf einer Seite des Dreiseits liegenden Wendepuncte durch die gegenüberliegende Ecke des Dreiseits geht.

Beweis 1. S. [483] Bew. 2.

Beweis 2. (Fig. 43.) Das Dreiseit sei  $r_1 r_2 r_3$ , und  $w$  ein auf  $r_1 r_2$  liegender Wendepunct. Die harmonische Polare  $W$  desselben geht durch  $r_3$  [365], und ihr Durchschnitt mit  $r_1 r_2$  heisse  $s$ . Geht nun die Curve  $v$  aus [622] in das Dreiseit





$$\mu = 0, \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2} \alpha, \quad \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{2} \alpha^2,$$

wo  $\alpha$  eine imaginäre Cubikwurzel der Einheit bezeichnet. Wird die Hesse'sche Curve  $H(u)$  der Curve  $u$  durch

$$H(u) = \mu'(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 6\lambda'x_1x_2x_3 = 0$$

bezeichnet, so gilt nach [483] die Beziehung

$$\frac{\lambda'}{\mu'} = \frac{\mu^3 - 2\lambda^3}{6\lambda^2\mu} = \frac{1 - 2\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3}{6\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2},$$

Stellt man nun die zweite Hesse'sche Curve durch

$$H(H(u)) = \mu''(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3) - 6\lambda''x_1x_2x_3 = 0$$

dar, so ist ebenso

$$\frac{\lambda''}{\mu''} = \frac{1 - 2\left(\frac{\lambda'}{\mu'}\right)^3}{6\left(\frac{\lambda'}{\mu'}\right)^2} = \frac{1 - 2\frac{(\mu^3 - 2\lambda^3)^3}{216\lambda^6\mu^3}}{6\frac{(\mu^3 - 2\lambda^3)^2}{36\lambda^4\mu^2}} = \frac{216\lambda^6\mu^3 - 2(\mu^3 - 2\lambda^3)^3}{36\lambda^2\mu(\mu^3 - 2\lambda^3)^2}.$$

Wenn nun diese zweite Hesse'sche Curve mit der ursprünglichen Curve identisch sein soll, so ist dazu nothwendig und hinreichend, dass der gefundene Ausdruck gleich  $\frac{\lambda}{\mu}$  sei. Das giebt die Gleichung

$$18\lambda^3\mu(\mu^3 - 2\lambda^3)^2 - \mu[108\lambda^6\mu^3 - (\mu^3 - 2\lambda^3)^3] = 0.$$

Diese ist in Beziehung auf  $\frac{\mu}{\lambda}$  vom 10., in Beziehung auf  $\frac{\lambda}{\mu}$  aber vom 9. Grade. Sie wird daher einmal erfüllt für  $\mu = 0$ . Dieser Werth liefert eines der syzygetischen Dreiseite, für welches schon die erste Hesse'sche Curve, also auch die zweite mit der ursprünglichen Curve zusammenfällt. Unterdrückt man den Factor  $\mu$  und setzt zur Abkürzung  $\frac{\lambda}{\mu} = k$ , so erhält man nach gehöriger Reduction die Gleichung

$$64k^9 - 168k^6 + 12k^3 + 1 = 0.$$

Dieser müssen nun aber auch diejenigen Werthe von  $k$  genügen, welche den drei anderen syzygetischen Dreiseiten angehören, nämlich  $k = \frac{1}{2}$ ,  $k = \frac{1}{2}\alpha$ ,  $k = \frac{1}{2}\alpha^2$ . Die linke Seite der vorigen Gleichung muss sich also durch  $8k^3 - 1$  ohne Rest theilen lassen. In der That erhält man durch Ausführung der Division

$$8k^6 - 20k^3 - 1 = 0,$$

und die sechs Wurzeln dieser Gleichung sind nun die Werthe von  $k$ , welche den sechs Curven angehören, deren zweite Hesse'sche Curven mit den ursprünglichen zusammenfallen. Man kann diese Gleichung sehr leicht auflösen und erhält, da sich

$$k^3 = \frac{5 \pm 3\sqrt{3}}{4}$$

ergiebt, für  $k$  die sechs Werthe

$$(1) \quad \begin{cases} k_1 = \sqrt[3]{\frac{5+3\sqrt{3}}{4}} & k_4 = \sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt{3}}{4}} \\ k_2 = \sqrt[3]{\frac{5+3\sqrt{3}}{4}} \alpha & k_5 = \sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt{3}}{4}} \alpha \\ k_3 = \sqrt[3]{\frac{5+3\sqrt{3}}{4}} \alpha^2 & k_6 = \sqrt[3]{\frac{5-3\sqrt{3}}{4}} \alpha^2. \end{cases}$$

Bemerkung. Man kann mit Hülfe der vorigen Betrachtung entscheiden, wie viele dieser Curven reell sind. Nimmt man nämlich zum Fundamentaldreieck das reelle syzygetische Dreieck an, so kann man zwar nicht schliessen, dass jedem reellen Werthe von  $k$  auch eine reelle Curve angehört; denn der reelle Werth  $k = \frac{1}{2}$  liefert das Dreieck

$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 - 3x_1x_2x_3 =$$

$$(x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \alpha x_2 + \alpha^2 x_3)(x_1 + \alpha^2 x_2 + \alpha x_3) = 0$$

(vgl. [354]), welches aus einer reellen und zwei conjugirt imaginären Geraden besteht, aber man kann zeigen, dass dieses der einzige reelle Werth von  $k$  ist, welcher nicht einer reellen Curve angehört. Man erhält nämlich aus [354] für die Wendetangenten an den drei reellen Wendepunkten

$$(0, +1, -1), (-1, 0+1), (+1, -1, 0)$$

die Gleichungen

$$2kx_1 + x_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + 2kx_2 + x_3 = 0, \quad x_1 + x_2 + 2kx_3 = 0.$$

Diese sind daher reell, so lange  $k$  reell ist. Für  $k = \frac{1}{2}$  fallen sie in die Verbindungslinie der reellen Wendepuncte  $x_1 + x_2 + x_3 = 0$  zusammen, welche eine Seite des eben erwähnten Dreiecks ist, für jeden anderen Werth von  $k$  aber sind sie von einander verschieden. Da nun also die Curve für jeden von  $\frac{1}{2}$  ver-

schiedenen reellen Werth von  $k$  in den drei reellen Wendepuncten auch reelle Tangenten hat, so ist sie selbst reell. Für imaginäre Werthe von  $k$  werden die Wendetangenten in den reellen Wendepuncten imaginär, und daher auch die Curve. Hiernach zeigen die Formeln (1), dass von den sechs in Rede stehenden Curven zwei reell und vier imaginär sind.

**627.** Die geraden Polaren eines Punctes  $h$  in Beziehung auf einen Büschel 3. O. schneiden sich nach [194] in einem Puncte. Ist der Büschel ein syzygetischer, so ist dieser Punct der Tangentialpunct  $k'$  von  $h$  auf derjenigen Curve des Büschels, welche durch  $h$  geht.

**Beweis.** Die durch  $h$  gehende Curve des Büschels heisse  $v$ . Dann ist die gerade Polare von  $h$  in Beziehung auf  $v$  die Tangente an  $v$  in  $h$  [269]. Diese geht also durch  $k'$ . Betrachtet man nun  $v$  als eine Hesse'sche Curve und bezeichnet mit  $u$  eine der drei zugehörigen Fundamentalcurven und mit  $h'$  den dieser entsprechenden conjugirten Pol zu  $h$ , so ist nach [459] die gerade Polare von  $h$  in Beziehung auf  $u$  die Tangente von  $v$  in  $h'$ , und diese geht, da  $h$  und  $h'$  als conjugirte Pole einen gemeinschaftlichen Tangentialpunct haben, ebenfalls durch  $k'$ . Da also in diesem Puncte sich die geraden Polaren von  $h$  in Beziehung auf zwei Curven des Büschels schneiden, so ist er der gemeinschaftliche Punct aller geraden Polaren. (*Salmon. On Curves of the 3<sup>d</sup> Order. Phil. Trans. Vol. 148 pag. 535. — H. pl. Cvs. pag. 156. — Cremona art. 148.*)

**628.** Die conischen Polaren eines Punctes  $p$  in Beziehung auf alle Curven eines Büschels 3. O. bilden nach [194] einen Kegelschnittbüschel. Ist der Büschel 3. O. ein syzygetischer, so sind die vier Basispuncte des Kegelschnittbüschels das zu  $p$  als Tangentialpunct gehörige Punctquadrupel  $p_1 p_2 p_3 p_4$  auf derjenigen Curve des Büschels, welche durch  $p$  geht.

**Beweis.** Da  $p$  der gemeinschaftliche Tangentialpunct zu  $p_1 p_2 p_3 p_4$  ist, so geht nach [627] die gerade Polare jedes dieser Puncte in Bezug auf jede Curve des syzygetischen Büschels durch  $p$ . Dann aber geht nach [273] die conische Polare von  $p$  in Bezug auf jede Curve des Büschels sowohl durch  $p_1$ , als auch durch  $p_2, p_3$  und  $p_4$ . (*Cayley l. c. [499] pag. 443. Cremona art. 148. a.)*

**629.** Ist  $p$  ein beliebiger Punkt einer Curve 3. O.  $u$ ,  $p_1 p_2 p_3 p_4$  das ihm als Tangentialpunkt zugehörige Punctquadrupel, ferner  $p' p'' p'''$  das dem vollständigen Viereck  $p_1 p_2 p_3 p_4$  angehörige Diagonaldreieck, so ist dieses Dreieck den conischen Polaren des Punctes  $p$  bezüglich aller mit  $u$  syzygetischer Curven 3. O. conjugirt (d. h. jede Seite ist die Polare der gegenüberliegenden Ecke). — Denn diese conischen Polaren bilden nach [628] einen Kegelschnittbüschel mit den Basispunkten  $p_1 p_2 p_3 p_4$  [108]. (*Cremona* art. 148. b.)

**630.** Wenn die Curven eines syzygetischen Büschels durch die Gleichung  $u + \lambda u' = 0$ , und die Wendetangenten der Curven  $u$  und  $u'$  in einem der Wendepunkte durch  $J = 0$  und  $J' = 0$  dargestellt werden, so hat die Wendetangente der Curve  $u + \lambda u' = 0$  in demselben Wendepunkte die Gleichung  $J + \lambda J' = 0$ .

**Beweis.** Man kann die Gleichung einer Curve 3. O. nach [245] in der Form  $D^2 F + ABC = 0$  darstellen, und dann bedeuten  $A, B, C$  drei Tangenten an der Curve, deren Berührungspunkte in der Geraden  $D$ , und deren Tangentialpuncte in der Geraden  $F$  liegen. Légt man nun die Gerade  $D$  in die harmonische Polare  $W$  eines Wendepunctes  $w$ , so fällt  $F$  in die Wendetangente  $J$  des letzteren, und  $A, B, C$  werden die aus  $w$  an die Curve gelegten Tangenten  $T_1 T_2 T_3$ . Die Gleichung der Curve nimmt dann also die Form an:

$$u = W^2 J + T_1 T_2 T_3 = 0,$$

und man kann auch umgekehrt schliessen, wenn bei dieser Gleichungsform  $W$  die harmonische Polare eines Wendepunctes ist, so ist  $J$  die zugehörige Wendetangente. Für eine zweite Curve  $u'$  des syzygetischen Büschels bleibt nun die harmonische Polare desselben Wendepunctes ungeändert, während  $J$  und die drei Tangenten  $T$  sich ändern, daher hat  $u'$  die Form

$$u' = W^2 J' + T_1' T_2' T_3' = 0.$$

Eine beliebige Curve des Büschels erhält also die Gleichungsform

$$u + \lambda u' = W^2(J + \lambda J') + T_1 T_2 T_3 + \lambda T_1' T_2' T_3' = 0.$$

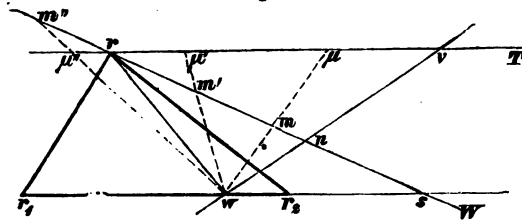
Nun lässt sich hierin der Ausdruck  $T_1 T_2 T_3 + \lambda T_1' T_2' T_3'$  ebenfalls in drei lineare Factoren zerlegen, denn nimmt man von

vorne herein die Ecke  $x_1=0, x_2=0$  des Fundamentaldreiecks in dem Wendepunkte  $w$  liegend an, so sind sowohl  $T_1 T_2 T_3$  als auch  $T'_1 T'_2 T'_3$  lineare homogene Functionen von  $x_1$  und  $x_2$  allein, da diese Geraden alle durch  $w$  gehen; mithin ist auch der fragliche Ausdruck eine homogene Function von  $x_1$  und  $x_2$  allein, und kann daher in drei lineare Factoren zerfällt werden. Demnach hat die letzte Gleichung wieder die frühere Form, und folglich ist  $J + \lambda J' = 0$  die Gleichung der Wendetangente für die Curve  $u + \lambda u' = 0$  in dem Wendepunkte  $w$ .

## §. 5.

631. Die harmonische Polare  $W$  eines Wendepunctes  $w$  schneide eine Curve des syzygetischen Büschels in  $m, m', m''$  und die Wendetangente derselben Curve in  $n$  (Fig. 44).

Fig. 44.



Variirt man die Curve, so beschreibt die Wendetangente einen Strahlenbüschel. Auf der harmonischen Polare bilden daher die Gruppen der Punkte  $m$  eine cubische Involution [607], und die Punkte  $n$  eine Punctreihe oder eine Involution ersten Grades [48]. Jene mag durch die Gleichung  $a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 + \lambda(b_0 x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3) = 0$ , diese durch die Gleichung

$$\alpha_0 y + \alpha_1 + \lambda(\beta_0 y + \beta_1) = 0$$

dargestellt werden, indem  $x$  den Abstand eines Punctes  $m$ , und  $y$  den des Punctes  $n$  von einem festen Puncte auf  $W$  bedeute. Wird nun aber der Curvenbüschel durch die Gleichung  $u + \lambda u' = 0$  dargestellt, so stellt nach [630]  $J + \lambda J' = 0$  den Büschel der Wendetangenten dar. Daher gehören in den vorigen beiden Gleichungen diejenigen Werthe von  $x$  von  $y$  derselben Curve an, welche gleichen Werthen von  $\lambda$  ent-

sprechen, und folglich [53] sind die beiden Involutionen projectivisch in Ansehung derjenigen Punctgruppen  $m$  und Puncte  $n$ , in denen  $W$  irgend eine Curve und deren Wendetangente durchschneidet. Eliminirt man nun  $\lambda$ , so erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} & (a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3)(\beta_0y + \beta_1) \\ & - (b_0x^3 + b_1x^2 + b_2x + b_3)(\alpha_0y + \alpha_1) = 0, \end{aligned}$$

welche diese projectivische Beziehung ausdrückt. Setzt man zur Abkürzung

$$\begin{aligned} a_0\beta_0 - b_0\alpha_0 &= a & a_1\beta_0 - b_1\alpha_0 &= 3b & a_2\beta_0 - b_2\alpha_0 &= 3c & a_3\beta_0 - b_3\alpha_0 &= d \\ a_0\beta_1 - b_0\alpha_1 &= a' & a_1\beta_1 - b_1\alpha_1 &= 3b' & a_2\beta_1 - b_2\alpha_1 &= 3c' & a_3\beta_1 - b_3\alpha_1 &= d', \end{aligned}$$

so schreibt sich diese Gleichung

$$(1) \quad (ay + a')x^3 + 3(by + b')x^2 + 3(cy + c')x + dy + d' = 0.$$

Wegen der besonderen Bedeutung der Puncte  $m$  und  $n$  werden zwischen den Coefficienten dieser Gleichung gewisse Beziehungen stattfinden. Wir werden diese aufzusuchen haben; zugleich aber kann man die Gleichung vereinfachen, wenn man nicht die auf  $W$  stattfindenden Involutionen betrachtet, sondern zwei mit ihnen projectivische auf einer anderen Geraden. Zu dem Ende sei  $r_1 r_2$  eine durch  $w$  gehende Seite eines syzygetischen Dreiseits,  $r$  die gegenüberliegende Ecke desselben, welche also auf  $W$  liegt [365]. Die Seite  $r_1 r_2$  schneide  $W$  in  $s$ . Aus dem Wendepuncte  $w$  ziehe man nun Strahlen nach den Puncten  $mm'm''$ ,  $n$ ,  $s$  und schneide diese Strahlen durch eine aus  $r$  parallel mit  $r_1 r_2$  s gehende Gerade  $T$  in  $\mu \mu' \mu''$ ,  $\nu$ ,  $\infty$ , dann bilden die Puncte  $\mu$  und  $\nu$  nach [55] zwei unter sich und mit den Puncten  $m$  und  $n$  projectivische Involutionen. Indem man nun den Punct  $r$  als Anfangspunct der Strecken wählt, soll die Gleichung (1) sich auf die auf der Geraden  $T$  befindlichen Strecken  $x = r\mu$  (oder  $r\mu'$ ,  $r\mu''$ ) und  $y = r\nu$  beziehen. Dann entspricht dem Eintreten des Werthes  $y = \infty$ , dass  $n$  auf  $s$  fällt, und umgekehrt.

Nun geht aus [623] hervor, dass wenn  $n$  auf  $s$  fällt, d. h. wenn die betrachtete Curve das Dreiseit  $r r_1 r_2$  ist, ein Punct  $m$  ebenfalls mit  $s$ , und die beiden anderen Puncte  $m$  mit  $r$  zusammenfallen. Und dasselbe gilt auch von den drei übrigen syzygetischen Dreiseiten. Bezeichnet man diejenigen Ecken

derselben, welche nach [615] auf  $W$  liegen, mit  $r', r'', r'''$ , und die Durchschnitte der ihnen gegenüberliegenden Seiten mit  $W$  durch  $s', s'', s'''$ , so fällt bei diesen jedesmal einer der betreffenden Punkte  $m$  auf einen Punkt  $s$ , und die beiden anderen Punkte  $m$  auf das entsprechende  $r$ . Zunächst muss nun also die Gleichung (1) so beschaffen sein, dass wenn  $y = \infty$  ist, wodurch sie in

$$ax^3 + 3bx^2 + 3cx + d = 0$$

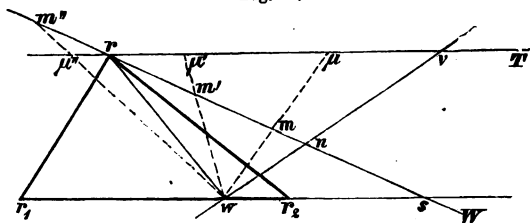
übergeht, eine ihrer Wurzeln unendlich gross, und die beiden anderen Null sind. Das erfordert, dass

$$a = c = d = 0$$

sei. Dadurch geht (1) über in

$$(2.) \quad a'x^3 + 3(by + b')x^2 + 3c'x + d' = 0.$$

Fig. 44.



Ferner hat man zu beachten, dass nach [614]  $r_1, r_2$  die gerade Polare von  $r$  in Bezug auf jede Curve des Büschels ist. In Folge dessen ist  $s$  nach [168] das harmonische Centrum ersten Grades für den Pol  $r$  und in Bezug auf die Punkte  $m, m', m''$ . Mithin hat man nach (1) in [168]

$$\frac{rm - rs}{rm} + \frac{rm' - rs}{rm'} + \frac{rm'' - rs}{rm''} = 0$$

oder

$$\frac{1}{rm} + \frac{1}{rm'} + \frac{1}{rm''} = \frac{3}{rs}.$$

Diese Eigenschaft überträgt sich auch auf die Gerade  $T$ . Denn nach [54] besteht zwischen den Abschnitten  $x$  und  $x'$  zweier Geraden, welche den nämlichen Strahlenbüschel schneiden, die Beziehung (wenn, wie hier,  $k = k' = 0$  ist)

$$x = \frac{acx'}{c - ax'},$$



worin  $a, a', c$  gewisse Constanten bedeuten. Setzt man nun vorübergehend

$$rm = x_1, rm' = x_2, rm'' = x_3, rs = z,$$

und bezeichnet die entsprechenden Abschnitte auf  $T$  mit  $x'_1$  etc., so ist

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{3}{z}$$

und daher auch

$$\frac{c - a'x'_1}{acx'_1} + \frac{c - a'x'_2}{acx'_2} + \frac{c - a'x'_3}{acx'_3} = \frac{3(c - a'z')}{acz'};$$

hieraus aber folgt

$$\frac{1}{x'_1} + \frac{1}{x'_2} + \frac{1}{x'_3} = \frac{3}{z'}.$$

Nun sind auf der Geraden  $T$   $x'_1, x'_2, x'_3$  die Wurzeln der Gleichung (2), also ist

$$\frac{3}{z'} = -\frac{3c'}{d'},$$

und da  $z' = \infty$  ist, so muss  $c' = 0$  sein. Damit reducirt sich die Gleichung (2) auf

$$(3) \quad a'x^3 + 3(by + b')x^2 + d' = 0.$$

Weitere Beziehungen zwischen den Coefficienten erhält man aus der Bemerkung, dass die Punkte  $s', s'', s'''$  in doppelter Weise erhalten werden können, einmal dadurch, dass zwei Punkte  $m$  zusammenfallen, denn dann fällt  $n$  auf einen Punkt  $s$ , oder dass zweitens ein  $m$  mit  $n$  zusammenfällt, dann tritt dasselbe ein. Im ersten Falle muss  $y$  so beschaffen sein, dass die Gleichung (3) für  $x$  zwei gleiche Wurzeln hat. Dafür erhält man aus [9] die Bedingung

$$(4) \quad a'^2d' + 4(by + b')^3 = 0.$$

Im zweiten Falle wird  $x=y$  und das giebt die Gleichung

$$(a' + 3b)y^3 + 3b'y^2 + d' = 0.$$

Die beiden letzten Gleichungen müssen also identisch, und daher ihre Coefficienten einander proportional sein. Bezeichnet man demnach mit  $\varrho$  einen Proportionalitätsfactor, so ist

$$\begin{aligned}
 4b^3 &= \varrho (a' + 3b) \\
 12b^2b' &= 3\varrho b' \\
 12bb'^2 &= 0 \\
 a'^2a' + 4b^3 &= \varrho a'.
 \end{aligned}$$

Da nun  $b$  nicht Null sein kann, weil dann die Gleichung (3) kein  $y$  enthalten würde, so muss wegen der dritten Gleichung  $b' = 0$  sein; dann liefert die vierte  $\varrho = a'^2$ , und damit die erste

$$4b^3 = a'^2 (a' + 3b).$$

Diese Gleichung lässt sich nach und nach in folgende Formen bringen

$$\begin{aligned}
 4b^3 &= a'^2 (a' + 2b) + a'^2 b \\
 a'^2 (a' + 2b) + b (a'^2 - 4b^2) &= 0 \\
 (a' + 2b) (a'^2 + b (a' - 2b)) &= 0,
 \end{aligned}$$

und wenn man  $2a'b - a'b$  statt  $a'b$  schreibt

$$(a' + 2b)^2 (a' - b) = 0.$$

Demnach ist also entweder  $a' = -2b$  oder  $a' = b$ . Um hierüber zu entscheiden, machen wir zunächst in (3) und (4)  $b' = 0$ , dann erhält man aus (3)

$$(5) \quad a'x^3 + 3byx^2 + a' = 0,$$

als die Gleichung, welche die Projectivität der beiden Involutionen ausdrückt; und wenn mit  $\eta$  der einem Punkte  $s$  zugehörige Werth von  $y$  bezeichnet wird, aus (4) für diese Punkte

$$4b^3\eta^3 + a'^2 a' = 0.$$

Diese Gleichung liefert nun für die beiden Annahmen

$$1) a' = b \quad 2) a' = -2b$$

resp.

$$(6) \quad 1) 4b\eta^3 = -a' \quad 2) b\eta^3 = -a',$$

und ebenso erhält man aus (5)

$$(7) \quad 1) bx^3 + 3byx^2 + a' = 0 \quad 2) -2bx^3 + 3byx^2 + a' = 0.$$

Bezeichnet man nun mit  $\xi$  die Werthe von  $x$ , welche  $y = \eta$  zugehören, so dass ein  $\xi$  einem Punkte  $s$ , und die beiden anderen  $\xi$  dem entsprechenden Punkte  $r$  angehören, so erhält man aus (7) wenn man darin  $x = \xi$  und  $y = \eta$  macht, und die Gleichungen (6) berücksichtigt

1)  $\xi^3 + 3\eta\xi^2 - 4\eta^3 = 0$       2)  $-2\xi^3 + 3\eta\xi^2 - \eta^3 = 0$ ,  
was sich schreiben lässt

$$(8) \quad 1) (\xi - \eta)(\xi + 2\eta)^2 = 0, \quad 2) (\xi - \eta)^2(2\xi + \eta) = 0.$$

Demnach wird bei der ersten Annahme ein  $\xi$  gleich  $\eta$ , und die beiden anderen einander gleich und von  $\eta$  verschieden; nach der zweiten dagegen sind zwei  $\xi$  gleich  $\eta$ , und das dritte davon verschieden. Von diesen beiden Resultaten entspricht nur das erste den thatsächlichen Verhältnissen, mithin ist die zweite Annahme zu verwerfen. Es gilt daher die erste der Gleichungen (7), und setzt man darin  $\frac{d'}{4b} = -h^3$ , so erhält man die Beziehung der Projectivität in ihrer einfachsten Gestalt:

$$(9) \quad x^3 + 3yx^2 - 4h^3 = 0,$$

welche nur noch von einer Constanten,  $h$ , abhängig ist. Die drei Punkte  $s' s'' s'''$  sind alsdann durch die erste der Gleichungen (6) bestimmt, nämlich

$$(10) \quad \eta^3 - h^3 = 0$$

und da ferner in der ersten der Gleichungen (8) der zweite Factor die Punkte  $r' r'' r'''$  liefert, für diese also  $\xi = -2\eta$  ist, so sind diese durch die Gleichung

$$(11) \quad \xi^3 + 8h^3 = 0$$

bestimmt. Hieraus geht hervor, dass sowohl die vier Punkte  $s s' s'' s'''$ , als auch die vier Punkte  $r r' r'' r'''$  vier äquianharmonische [26] Punkte sind. Denn werden vier Punkte dadurch bestimmt, dass ihre Abstände  $u$  von einem festen Punkte der Gleichung

$$au^4 + 4bu^3 + 6cu^2 + 4du + e = 0$$

genügen, so sind sie nach [28] vier äquianharmonische Punkte, wenn

$$(12) \quad ae - 4bd + 3c^2 = 0$$

ist. Nun werden die Punkte  $s' s'' s'''$  durch die Wurzeln der Gleichung (10) bestimmt, während für  $s$  selbst  $\eta = \infty$  ist. Man hat also hier

$$a = 0, \quad 4b = 1, \quad c = 0, \quad d = 0, \quad e = -h^3$$

und der Gleichung (12) wird genügt. Die Punkte  $r' r'' r'''$

bestimmen sich aus (11), und für  $r$  ist  $\xi = 0$ . Man hat demnach

$$a = 1, b = 0, c = 0, d = 2h^3, e = 0,$$

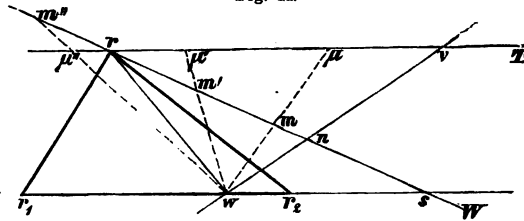
und diese Werthe genügen der Gleichung (12) ebenfalls. Man hat also die Sätze:

Die vier Ecken  $r r' r'' r'''$  der vier syzygetischen Dreiseite, welche auf der nämlichen harmonischen Polare liegen, sind vier äquianharmonische Punkte.

Die vier Punkte  $s s' s'' s'''$ , in denen die vier Seiten der vier syzygetischen Dreiseite, die durch den nämlichen Wendepunkt  $w$  gehen, die harmonische Polare  $W$  des letzteren schneiden, sind vier äquianharmonische Punkte. (*Cremona* art. 144.)

Die vier Geraden, welche durch denselben Wendepunkt gehen, und jede ausserdem noch zwei Wendepunkte enthalten, bilden einen äquianharmonischen Büschel.

Fig. 44.



**632.** Die Gleichung (9) in [631] gilt für jede Curve des syzygetischen Büschels, also wenn man eine derselben heraushebt, auch für die Hesse'schen Curve der letzteren. Bezeichnet man mit  $M, M', M''$  und  $N$  die Punkte, in welchen die harmonische Polare  $W$  die Hesse'sche Curve und deren Wendetangente in  $w$  schneidet, und mit  $m, m', m''$  und  $n$  die Punkte, in denen die Strahlen  $w(M, M', M'', N)$  die Gerade  $T$  treffen, und setzt endlich  $X = rm$  (oder  $rm', rm''$ ),  $Y = rn$ , so ist nach (9)

$$(13) \quad X^3 + 3YX^2 - 4h^3 = 0.$$

Nun ist aber nach [463] die Wendetangente  $wn$  der Fundamentalcurve zugleich Tangente an der Hesse'schen Curve, und  $\bar{n}$  der Berührungspunkt, es fällt also jedesmal einer der



Curve gehöre der Abschnitt  $F'$  an, betrachtet man dann die erste Hesse'sche Curve als Fundamentalcurve, so hat man in (14)  $F$  statt  $y$  zu schreiben und erhält die Gleichung

$$F^3 + 3 F' F^2 - 4 h^3 = 0.$$

Fällt nun die zweite Hesse'sche Curve mit der ursprünglichen Curve zusammen, so ist  $F' = y$  und daher

$$F^3 + 3 y F^2 - 4 h^3 = 0.$$

Verbindet man hiermit die Gleichung (14) nämlich

$$y^3 + 3 F y^2 - 4 h^3 = 0,$$

so folgt

$$y^3 - F^3 + 3 F y (y - F) = 0$$

oder

$$(y - F) (y^2 + y F + F^2 + 3 y F) = 0.$$

Ist darin  $y = F$ , so fällt  $n$  mit  $N$  zusammen, d. h. die ursprüngliche Curve ist ein Dreieck, und für eine solche fällt schon die erste Hesse'sche Curve, und also auch die zweite mit der ursprünglichen zusammen. Nach Unterdrückung des Factors  $y - F$  bleibt dann

$$y^2 + 4 y F + F^2 = 0,$$

und eliminiert man hieraus  $F$  mit Hilfe der Gleichung (14) indem man den daraus folgenden Werth für  $F$

$$F = \frac{4 h^3 - y^3}{3 y^2}$$

substituirt, so erhält man die Gleichung

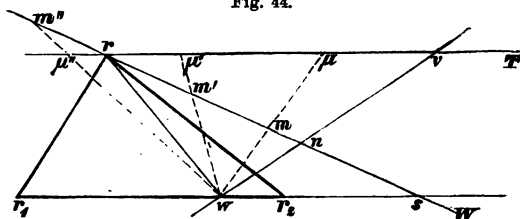
$$(15) \quad y^6 - 20 h^3 y^3 - 8 h^6 = 0,$$

deren Wurzeln  $y$  den sechs Curven des Büschels angehören, welche mit ihren zweiten Hesse'schen Curven zusammenfallen und keine Dreiecke sind. Da diese Gleichung aufgelöst liefert  $y^3 = (10 \pm 6\sqrt{3}) h^3$ , so sind zwei ihrer Wurzeln reell, und die vier übrigen imaginär (vgl. [626]). (*Cremona* art. 144 b.)

**633.** Die vier aus einem Curvenpunkte an die Curve gelegten Tangenten bilden nach [376] einen Strahlenbüschel, dessen Doppelverhältniss constant ist. Indem wir nun die vier von  $w$  ausgehenden Tangenten  $w (m, m', m'', n)$  betrachten,

können wir entscheiden, bei welchen Curven des syzygetischen Büschels der Tangentenbüschel ein harmonischer, und bei welchen ein äquianharmonischer ist. Da nämlich diese Tangenten die Gerade  $T$  in den Punkten  $\mu, \mu', \mu'', v$  treffen, welche durch die Abschnitte  $x$  (für  $\mu, \mu', \mu''$ ) und  $y$  (für  $v$ ) bestimmt sind, so brauchen wir nur das Doppelverhältniss dieser vier Punkte zu untersuchen. Nun sind die Punkte  $\mu$

Fig. 44.



gegeben durch die Wurzeln  $x$  der Gleichung (9), fügt man dieser also den Factor  $x - y$  hinzu, so erhält man eine Gleichung, deren Wurzeln den vier Punkten  $\mu, \mu', \mu'', v$  angehören, mithin

$$(x-y)(x^3 + 3yx^2 - 4h^3) = 0$$

d. i.

$$x^4 + 2yx^3 - 3y^2x^2 - 4h^3x + 4h^3y = 0.$$

Wenn aber vier Punkte durch eine Gleichung von der Form

$$ax^4 + 4bx^3 + 6cx^2 + 4dx + e = 0$$

bestimmt sind, so sind sie nach [28] äquianharmonisch wenn

$$ae - 4bd + 3c^2 = 0,$$

und nach [27] harmonisch in irgend einer Zuordnung, wenn

$$ace + 2bcd - ad^2 - eb^2 - c^3 = 0$$

ist. Setzt man also

$$a = 1, b = \frac{1}{2}y, c = -\frac{1}{2}y^2, d = -h^3, e = 4h^3y,$$

so erhält man als Bedingung, unter welcher  $\mu, \mu', \mu'', v$  vier äquianharmonische Punkte sind,

$$4h^3y + 2h^3y + \frac{3}{4}y^4 = \frac{3}{4}y(y^3 + 8h^3) = 0.$$

Es giebt demnach vier solche Curven, entsprechend den Werthen  $y = 0$  und  $y^3 + 8h^3 = 0$ , von denen die letzteren der Gleichung (11) genügen. Die Wendetangenten dieser Curven gehen also durch die Punkte  $r, r', r'', r'''$ , und diese Curven haben die Dreiseite zu ihren Hesse'schen Curven [623].

Für die Bedingung, dass  $\mu\mu'\mu''v$  vier harmonische Punkte sind, erhält man ferner

$$-2h^3y^3 + \frac{1}{2}h^3y^3 - h^6 - h^3y^3 + \frac{1}{8}y^6 = 0$$

oder

$$y^6 - 20h^3y^3 - 8h^6 = 0,$$

und das ist die Gleichung (15), welche die sechs Curven liefert, deren zweite Hesse'schen Curven mit den ursprünglichen zusammenfallen.

Nennt man demnach eine Curve, bei welcher der Tangentenbüschel ein harmonischer oder äquianharmonischer ist, selbst harmonisch oder äquianharmonisch, so hat man die Sätze:

Unter den Curven eines syzygetischen Büschels giebt es vier äquianharmonische, und diese sind diejenigen, deren Hesse'sche Curven aus den vier Dreiseiten bestehen.

In demselben Büschel giebt es ferner sechs harmonische Curven, und diese sind diejenigen, bei denen die zweite Hesse'sche Curve mit der ursprünglichen zusammenfällt. (*Cremona* art. 145.)

**634.** Die Hesse'sche Curve  $v$  einer harmonischen Curve  $u$  ist selbst eine harmonische Curve. — Denn in diesem Falle ist  $H(u) = v$  und  $H(v) = H(H(u)) = u$ ; mithin auch  $H(H(v)) = H(u) = v$ . Dagegen sind die beiden anderen Curven  $u'$  und  $u''$ , welche  $v$  ebenfalls zur Hesse'schen Curve haben, keine harmonischen Curven, denn wäre dies der Fall, so müsste  $H(H(u')) = H(v) = u'$  sein, während doch  $H(v) = u$  ist. Demnach theilen sich die sechs in einem syzygetischen Büschel vorkommenden harmonischen Curven in drei Paare der Art, dass in demselben Paare jede der beiden Curven die Hesse'sche der anderen ist.



## Z u s ä t z e.

---

Zu Art. 15. Die hier gegebene Zeichenregel ist nur für die auf die Seiten des Fundamentaldreiecks gefällten Perpendikel von Wichtigkeit. Bei den Coordinaten kann man, da lediglich ihre Verhältnisse in Betracht kommen, die Vorzeichen nach Belieben umkehren, nur muss dies bei allen drei Coordinaten gleichzeitig geschehn.

---

Zu Art. 212. Die unendlich ferne Gerade [16] schneidet, wie jede andere Gerade eine Curve 3. O. auch in drei Puncten, von denen zwei imaginär sein können; daher hat eine Curve 3. O. entweder einen oder drei sich in's Unendliche erstreckende Zweige. Die Tangenten in diesen unendlich fernen Puncten der Curve sind die Asymptoten der letzteren. Demnach hat eine Curve 3. O. drei Asymptoten, von denen entweder nur eine reell ist, oder alle drei.

---

Zu Art. 241. Dieser Satz kann auch so ausgesprochen werden: Sind  $a, b, \alpha$  drei in gerader Linie liegende Curvenpuncte, so schneidet jeder die Curve in  $a$  und  $b$  berührende Kegelschnitt dieselbe in zwei Puncten  $n, p$ , welche mit dem Tangentialpuncte  $m$  von  $\alpha$  in gerader Linie liegen.

---

Zu Art. 316. Man kann auch umgekehrt sagen: Der Punct  $a'$ , in welchem die gerade Polare eines auf einer Ge-

raden  $G$  liegenden Punctes  $a$  die Poloconik von  $G$  berührt, ist der Pol von  $G$  in Bezug auf die conische Polare  $C_a$  von  $a$ .

---

Zu Art. 317. Dieser Artikel sollte in §. 1 unmittelbar auf [315] folgen.

---

## Bemerkte Druckfehler.

---

S.	5	Z.	2	v. o.	statt	$\Delta_y^{n-1}(u_y)$	lies	$\Delta_x^{n-1}(u_y)$ .
"	6	"	15	v. u.	"	link	lies	links.
"	27	"	11	"	"	Werthe	lies	Werthen.
"	76	in	Fig. 15	"	"	$S$	lies	$K$ .
"	108	Z.	14	v. o.	"	Lionville	lies	Liouville.
"	139	"	2	v. u.	"	gegebene	lies	gegebenen.
"	151	"	1	v. o.	"	$Q'$	"	$Q$ .
"	173	"	18	"	"	$\Delta_e$	"	$\Delta_c$ .
"	193	"	4	"	"	$c''$	"	$b''$ .
"	219	"	8	v. u.	"	$a_2$	"	$a_3$ .
"	221	"	1	"	"	Puncta	"	Punct $a$ .

---

Neuer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

1870.

**Mathematik, Physik und technische Literatur.**

**Bretschneider, C. A.**, Professor am Gymnasium in Gotha, die Geometrie und die Geometer vor Euklides. Ein historischer Versuch. Mit einer lithographierten Tafel. [IV u. 184 S.] gr. 8. geh. n. 1 Thlr. 10 Ngr.

**Eickemeyer, Franz**, Ingenieur und Docent an der polytechnischen Schule in München, das Massen-Nivellement und dessen praktischer Gebrauch. Mit zwei lithographierten Tafeln [in Folio] und 5 Figuren in Holzschnitt. [IV u. 44 S.] gr. 8. geh. n. 20 Ngr.

**Kohlrausch, F.**, a. o. Professor in Göttingen, Leitfaden der praktischen Physik zunächst für das physikalische Practicum in Göttingen. [VIII u. 123 S.] gr. 8. geh. n. 1 Thlr.

**Neumann, Dr. C.**, Professor der Mathematik an der Univ. zu Leipzig, über die Principien der Galilei-Newton'schen Theorie. Akademische Antritts-Vorlesung gehalten in der Aula der Universität Leipzig am 3. November 1869. [32 S.] gr. 8. geh. n. 10 Ngr.

**Reusch, E.**, Professor in Tübingen, Constructionen zur Lehre von den Haupt- und Brennpunkten eines Linsensystems. Mit 5 auf Stein gravierten Tafeln (in besonderem Hefte). [VIII u. 70 S.] gr. 8. geh. n. 1 Thlr.

**Schell, Dr. Wilh.**, Professor am Polytechnicum zu Carlsruhe, Theorie der Bewegung und der Kräfte. Ein Lehrbuch der theoretischen Mechanik, mit besonderer Rücksicht auf die Bedürfnisse technischer Hochschulen bearbeitet. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. Vierte und fünfte Lieferung (Schluss). gr. 8. geh. à Liefg. n. 28 Ngr.

— — — Dasselbe, vollständig in einem Band. [XIX u. 970 S.] gr. 8. geh. n. 4 Thlr. 20 Ngr.

**Schlömilch, Dr. Oskar**, Königl. Sächs. Hofrath und Professor an der polytechnischen Schule zu Dresden, Uebungsbuch zum Studium der höheren Analysis. Zweiter Theil: Aufgaben aus der Integralrechnung. Mit Holzschnitten im Texte. [VII u. 338 S.] gr. 8. geh. n. 2 Thlr.

**Weyr, Dr. Emil**, Privatdocent an der Universität Prag, Geometrie der räumlichen Erzeugnisse ein-zwei-deutiger Gebilde, insbesondere der Regelflächen dritter Ordnung. [VII u. 175 S.] gr. 8. geh. n. 1 Thlr. 10 Ngr.

**Wüllner, Dr. Adolf**, Professor der Physik an der Königl. polytechnischen Schule zu Aachen, Lehrbuch der Experimentalphysik. Erster Band: Mechanik und Akustik. [Dritte Ausgabe.] Zweite vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. Mit vielen in den Text gedruckten Holzschnitten. [XII u. 702 S.] gr. 8. geh. n. 2 Thlr. 20 Ngr.

**Zu beziehen durch alle Buchhandlungen.**

Neuer Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.  
1871.

**Mathematik und Physik.**

- Bardey, Dr. E.**, quadratische Gleichungen mit den Lösungen für die oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen. [III u. 86 S.] gr. 8. geh. n. 16 Ngr.
- Hesse, Otto**, ordentl. Professor an dem k. Polytechnikum zu München, die Determinanten elementar behandelt. [III u. 47 S.] gr. 8. geh. n. 10 Ngr.
- Fiedler, Wilhelm**, Professor am eidgenössischen Polytechnikum zu Zürich, die darstellende Geometrie. Ein Grundriss für Vorlesungen an technischen Hochschulen und zum Selbststudium. Mit 228 Holzschnitten und 12 lithographierten Tafeln. [XXXVI u. 592 S.] gr. 8. geh. n. 4 Thlr. 24 Ngr.
- Fuhrmann, Dr. Arwed**, ausserordentlicher Professor am königl. Polytechnikum zu Dresden, Aufgaben aus der analytischen Mechanik. Mit einem Vorwort von Dr. O. Schlömilch. In zwei Theilen: Zweiter Theil: Aufgaben aus der analytischen Dynamik fester Körper. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [VII u. 207 S.] gr. 8. geh. n. 1 Thlr. 6 Ngr.
- Sierseemann, Dr. Carl Heinrich**, Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. [IV u. 175 S.] gr. 8. geh. n. 12 Ngr.
- Meyer, Dr. phil. Gustav Ferdinand**, ehemal. Privatdocent an der Universität Göttingen, Vorlesungen über die Theorie der bestimmten Integrale zwischen reellen Grenzen, mit vorzüglicher Berücksichtigung der von P. Gustav Lejeune-Dirichlet im Sommer 1858 gehaltenen Vorträge über bestimmte Integrale. Mit in den Text gedruckten Holzschnitten. [XVIII u. 628 S.] gr. 8. geh. n. 4 Thlr.
- Wand, Theodor**, Consistorial-Assessor u. Mitglied der bayrischen Abgeordneten-Kammer, die Principien der mathematischen Physik und die Potentialtheorie nebst ihren vorzüglichsten Anwendungen. Mit 8 in den Text gedruckten Holzschnitten. [VIII u. 184 S.] gr. 8. geh. n. 1 Thlr.
- Wittwer, Dr. W. C.**, Professor der Physik am k. b. Lyceum zu Regensburg, die Moleculargesetze dargestellt. Mit einer Figurentafel. [VIII u. 155 S.] gr. 8. geh. n. 1 Thlr.
- Wüllner, Dr. Adolph**, Professor der Physik an der königl. polytechnischen Schule zu Aachen, Lehrbuch der Experimentalphysik. Zweiter Band. Die Lehre vom Licht. Mit vielen Holzschnitten und 4 Spectraltafeln. [Dritte Ausgabe.] Zweite vielfach umgearbeitete und verbesserte Auflage. [VIII u. 612 S.] gr. 8. geh. n. 3 Thlr.
- Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht.** Ein Organ für Methodik, Bildungsgehalt und Organisation der exacten Unterrichtsfächer an Gymnasien, Realschulen, Lehrerseminarien und höheren Bürgerschulen. Unter Mitwirkung von Fachlehrern herausgegeben von J. C. V. Hoffmann, Oberlehrer am Gymnasium zu Freiberg in Sachsen. Zweiter Jahrgang 1871. 6 Hefte. gr. 8. Geh. n. 3 Thlr.

**Zu beziehen durch alle Buchhandlungen.**

11

12

13

14

15

16

17

18

19

20









This book should be returned to  
the Library on or before the last date  
stamped below.

A fine of five cents a day is incurred  
by retaining it beyond the specified  
time.

Please return promptly.

DUE DEC 24 1914

~~1915 JAN 30 1915~~

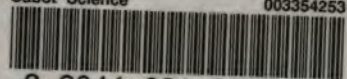


Math 858.71

Die ebenen Curven dritter Ordnung :

Cabot Science

003354253



3 2044 091 921 197